

Feldfreie Plasmakonfigurationen
im Gleichgewicht
mit ebenen Magnetfeldern

von

PETER MERKEL

München 1965

Feldfreie Plasmakonfigurationen im Gleichgewicht

mit ebenen Magnetfeldern

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Ludwig Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Peter Merkel

München 1965



1. Berichterstatter: Prof. Dr. A. Schlüter
2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Februar 1965

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
1. Die M+S Hohlzylinderkonfiguration	4
1.1. Die Gleichgewichtsbedingungen	4
1.2. Die funktionentheoretische Formulierung des Problems	6
1.3. Die Lösungsmethode am Beispiel einer speziellen Drahtleiteranordnung	8
1.4. Diskussion der Lösung	13
1.5. Drahtleiter als Hin- und Rückleiter	18
2. Lineare cusp-Anordnungen	21
2.1. Der lineare cusp	21
2.2. Die "picket fence" Geometrie	24
3. Das allgemeine potentialtheoretische Problem	28
3.1. Die allgemeine Lösung	28
3.2. Drahtleiteranordnungen	30
Anhang	33
Zusammenfassung	48
Literaturverzeichnis	49
Lebenslauf	50



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Beschränkt man sich bei der Untersuchung des magnetohydrostatischen Gleichgewichtes eines Plasmas mit einem äußeren Magnetfeld auf magnetfeldfreie Plasmen, so liegt ein rein potentialtheoretisches Problem für ein Magnetfeld und die es erzeugenden stationären Ströme vor. Das Plasma wird in diesem Falle allein durch die Geometrie seiner Oberfläche und durch seinen konstanten Gasdruck beschrieben. Die Gleichgewichtsbedingungen für ein solches Plasma kommen in Randbedingungen für das äußere Magnetfeld an der Plasmaoberfläche zum Ausdruck.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer speziellen Klasse solcher magnetohydrostatischer Gleichgewichte. Es werden ebene Anordnungen betrachtet. Diese sind dadurch charakterisiert, daß alle Ströme parallel, bzw. antiparallel zu einer ausgezeichneten Richtung fließen. Solche linearen, unendlich langen Anordnungen sind in einer Ebene normal zur ausgezeichneten Richtung eindeutig bestimmt. Damit liegt ein zweidimensionales, ebenes potentialtheoretisches Problem vor.

Bekannte einfache Beispiele solcher Gleichgewichte findet man im Z-pinch und im tubular pinch. Kennzeichnend für diese Anordnungen ist, daß sich die Plasmaströme nicht im Plasma, sondern über Elektroden im äußeren Leiterkreis schließen. Analog dazu gibt es elektrodenlose Konfigurationen, bei denen Außen- und Plasmaströme jeweils in sich geschlossen sind. Im Plasma fließen dann ausschließlich vom Außenkreis induzierte Ströme. Solche elektrodenlosen Konfigurationen sollen hier studiert werden.

Von Meyer und Schmidt¹ ist das magnetohydrostatische Gleichgewicht einer toroidalen Plasmakonfiguration ohne azimutalen, d.h. die Torusachse umschließenden Gesamtstrom untersucht worden. Sie haben als Lösung einer differentialgeometrischen Aufgabe mögliche Gleichgewichtsflächen des Plasmas gefunden. Die schwierige Frage nach dem Magnetfeld im Außenraum und nach der das Magnetfeld erzeugenden

Stromverteilung ist dabei offen geblieben. Die Schwierigkeiten dieses dreidimensionalen Problems legen es nahe, zunächst zu einem unendlich langen Hohlzylinder entartete Meyer und Schmidt (abgekürzt: M+S)-Torusanordnungen zu studieren. Diese Entartung ist so gemeint, daß die Torusachse Hohlzylinderachse wird. Damit hat man eine ebene, elektrodenlose Anordnung des oben beschriebenen Typs vor sich. Wie sich zeigen wird, können in diesem Fall analytische Lösungen des vollen Problems gefunden werden.

Neben dem M+S Hohlzylinder, einem zweifach zusammenhängenden Plasmagebilde, werden lineare cusp-Konfigurationen, bei denen das Plasma ein einfach zusammenhängender Zylinder ist, untersucht. Die cusp-Geometrien sind wegen ihres stabilen magnetohydrodynamischen Verhaltens wichtig. Auch hier gibt es für ein feldfreies Plasma analytische Lösungen des Gleichgewichtsproblems.

Zur Behandlung des vorliegenden ebenen potentialtheoretischen Problems erweisen sich die Methoden der Funktionentheorie als besonders geeignet. In Kap.1.1 werden die Gleichgewichtsbedingungen zwischen Plasma und Magnetfeld für den M+S Hohlzylinder angegeben, und in Kap.1.2 wird das Problem funktionentheoretisch formuliert. Die Lösungsmethode wird in Kap.1.3 an Hand einer einfachen M+S Hohlzylinderanordnung dargestellt. Als Hinleiter für die Außenströme wird eine symmetrische Drahtleiterkonfiguration, als Rückleiter ein Kreiszylindermantel gewählt. Es zeigt sich, daß die Lösungen für solche Außenstromverteilungen besonders einfach werden. Für diese Anordnung ergibt sich eine einparametrische Lösungsschar, die in Kap.1.4 im einzelnen diskutiert wird. In Kap.1.5 wird ein weiteres M+S Hohlzylindergleichgewicht behandelt, bei welchem Hin- und Rückleiter aus Drahtleitern bestehen.

In Kap.2 werden lineare cusp-Konfigurationen, deren Außenleiter ebenfalls aus geraden Drähten bestehen, untersucht und zwar in Kap.2.1 der lineare cusp, in Kap.2.2 die sogenannte "picket fence"-Geometrie. In beiden Fällen erhält man ebenfalls einparametrische Lösungsscharen.

In Kap.3.1 wird das in Kap.1.2 formulierte funktionentheoretische Problem allgemein behandelt. Es zeigt sich, daß auch für allgemeinere Außenstromverteilungen als für Drahtströme Lösungen existie-

ren und mit der hier entwickelten Methode berechnet werden können. Für Drahtleiteranordnungen werden die Lösungen allerdings besonders einfach. In Kap.3.2 wird abschließend die Lösung für den M+S Hohlzylinder mit einer allgemeinen Drahtleiteranordnung angegeben.

Jeder magnetohydrostatischen Aufgabe ist ein hydrodynamisches Problem äquivalent. So entspricht die hier behandelte Frage dem Problem der freien Stromlinien bei diskontinuierlichen Flüssigkeitsströmungen. Die erste Lösung einer solchen Aufgabe stammt von Helmholtz². Von Kirchhoff³ und anderen ist dann eine allgemeine funktionentheoretische Methode⁴ zur Behandlung dieses Problems entwickelt worden. In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode nicht benutzt.

Von den hier behandelten magnetohydrostatischen Gleichgewichten ist die lineare cusp-Geometrie schon von Berkovitz⁵ untersucht worden. Er erhält mit der Helmholtz-Kirchhoffschen Methode für die Lösungskurven der Gleichgewichtsfläche eine Integraldarstellung, während sich hier eine explizite Parameterdarstellung ergibt. Für die M+S Hohlzylinderanordnung ist von Gorenflo⁶ eine Lösung angegeben worden, die ebenfalls mit funktionentheoretischen Methoden gewonnen wurde.

1. Die M+S Hohlzylinderkonfiguration.

Unter einem M+S Hohlzylinder wird eine zweifach zusammenhängende, unendlich lange Plasmakonfiguration im Gleichgewicht mit einem äußeren Magnetfeld verstanden, wobei die Ströme im Plasma und in den äußeren Leitern, die zusammen das Magnetfeld erzeugen, parallel zur Hohlzylinderachse fließen. Die Strombahnen im Plasma und in den äußeren Leitern sind (im Unendlichen) jeweils in sich geschlossen. Die Anordnung ist also elektrodienlos; die Ströme im Plasma werden vom äußeren Kreis induziert (Abb.1). Im folgenden werden Lösungen für ein solches Gleichgewicht gesucht.

1.1. Die Gleichgewichtsbedingungen.

Die Achse des Plasmahohlzylinders liege in der t -Richtung eines kartesischen Rechtssystems (u, v, t) . Alle Größen sind in dieser Anordnung von t unabhängig. Die Komponenten des Magnetfeldes liegen in der (u, v) -Ebene, die Plasmakonfiguration ist durch ihren Querschnitt in der (u, v) -Ebene eindeutig bestimmt. Das Plasma sei durch das zweifach zusammenhängende Gebiet G_p mit den Randkurven C_0 und C_1 definiert. C_0 und C_1 sind zugleich Randkurven der einfach zusammenhängenden Gebiete G_0 und G_1 , wobei G_1 den unendlich fernen Punkt enthält (Abb.2).

Die Untersuchung wird auf Plasmen, die im Innern feldfrei sind, beschränkt. Dann fließen im Plasma lediglich auf der Oberfläche Ströme, im vorliegenden Falle also durch die Randkurven C_0 und C_1 , senkrecht zur (u, v) -Ebene. Das Magnetfeld ist an der Plasmaoberfläche wegen $\text{div } \vec{B} = 0$ tangential oder mit anderen Worten, die Randkurven sind Magnetfeldlinien. Die magnetische Feldstärke $\vec{B}^*$ an der Oberfläche ist mit der Oberflächenstromdichte j^* des feldfreien Plasmas durch die Gleichung^{+))}

$$(1.1) \quad \vec{n} \times \vec{B}^* = - \frac{4\pi}{c} j^*$$

verknüpft. $\vec{n}$ ist der äußere Normaleneinheitsvektor der Randkurve C_0 , bzw. C_1 des Gebietes G_0 , bzw. G_1 . Der Gasdruck p ist im feldfreien Plasma konstant. Aus der Gleichgewichtsbedingung

+) Es werden elektrostatische cgs-Einheiten verwendet.

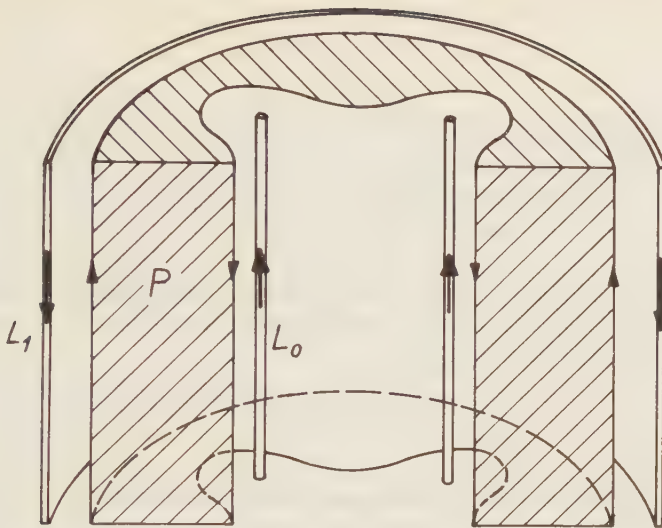


Abb.1 Schematische Ansicht einer M+S Hohlzylinderkonfiguration.

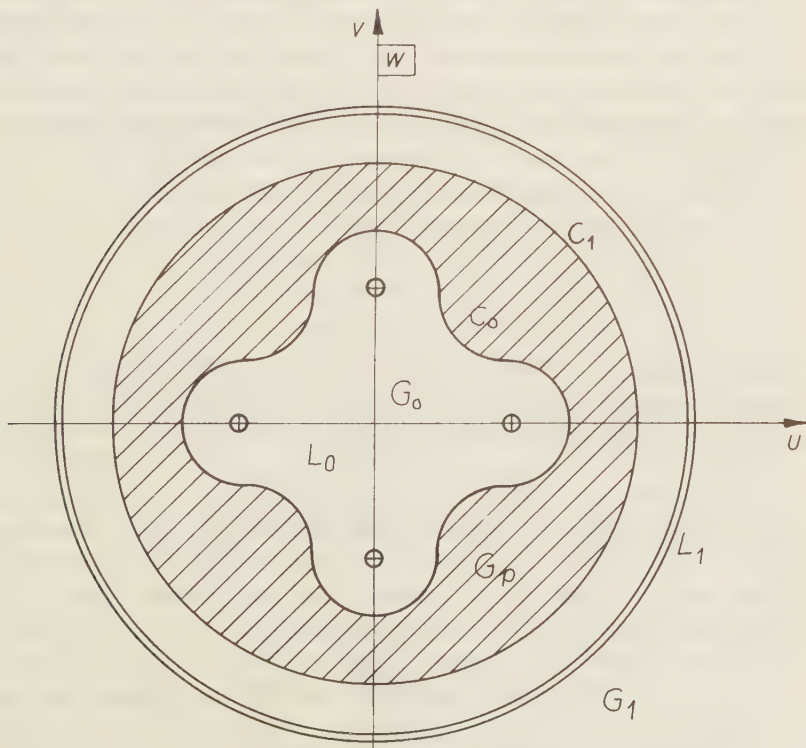


Abb.2 Querschnitt G_p des M+S Hohlzylinders. L_0, L_1 sind die äußeren Leiter.

zwischen Gasdruck p und Magnetfeld $\vec{B}^*$ an der Oberfläche des Plasmas

$$(1.2) \quad \frac{1}{8\pi} \vec{B}^{*2} = p$$

folgt, daß im Gleichgewicht der Betrag der magnetischen Feldstärke $\vec{B}^*$ und mit (1.1) auch der Betrag der Stromdichte j^* auf der Plasmaoberfläche konstant ist:

$$(1.3) \quad \frac{2\pi}{c^2} j^{*2} = p$$

Damit liegt die Stromverteilung auf der Oberfläche des M+S Hohlzylinders im wesentlichen fest. Der Strom fließt mit konstanter Dichte auf dem Innenmantel durch C_0 in n_t -Richtung, auf dem Außenmantel durch C_1 in $-n_t$ -Richtung oder umgekehrt und schließt sich im Unendlichen (n_t ist der Einheitsvektor der t-Achse). Der Fall, daß der Strom längs C_0 oder C_1 sein Vorzeichen wechselt, d.h. daß die Stromdichteverteilung unstetig ist, sei hier ausgeschlossen (vgl. cusp). Wegen der Divergenzfreiheit des Stromes sind die Gesamtströme I_0, I_1 durch C_0, C_1 entgegengesetzt gleich groß: $I_0 = -I_1$. Da im Gleichgewicht die Stromdichte j^* auf C_0 und C_1 nach (1.3) konstant und gleich ist, folgt, daß die Kurven C_0 und C_1 gleich lang sein müssen:

$$(1.4) \quad L(C_0) = L(C_1)$$

Diese Bedingung ist für den M+S Hohlzylinder die eigentlich charakteristische. Es können z.B. nicht beide Kurven Kreise sein, wie es beim tubular pinch möglich ist.

Da das Plasma als feldfrei angenommen wurde, verschwindet das Integral $I = \int \vec{H} d\vec{s}$ längs einer beliebigen, geschlossenen Kurve C_p , die in G_p liegt und G_0 umschließt, und somit der Gesamtstrom durch C_0 und G_0 . Daraus folgt die Notwendigkeit einer äußeren Stromverteilung; denn durch G_0 muß der Strom $I_{L_0} = -I_0$ (I_0 ist der Strom durch C_0) fließen. Analog fließt durch G_1 der Strom $I_{L_1} = -I_1$. Die Ströme durch G_0 und G_1 schließen sich im Unendlichen.

Damit ist das Problem charakterisiert. In der (u,v) -Ebene werden Kurven C_0 und C_1 mit konstanter Stromdichtebelegung und eine Verteilung von äußeren Strömen derart gesucht, daß das durch sie erzeugte Magnetfeld die oben formulierten Randbedingungen erfüllt. Ein solches ebenes potentialtheoretische Problem wird geeigneterweise mit funktionentheoretischen Methoden behandelt. Im folgenden wird die Aufgabe daher funktionentheoretisch präzisiert.

1.2. Die funktionentheoretische Formulierung des Problems.

Wegen der Feldfreiheit des Plasmas zerfällt das Magnetfeld in zwei getrennte Gebiete G_0 und G_1 . Es werden also je eine Lösung für G_0 und G_1 desselben potentialtheoretischen Problems gesucht, wobei darauf zu achten ist, daß (1.4) erfüllt wird. Es genügt daher, die Aufgabe für ein einfach zusammenhängendes Gebiet G zu formulieren.

Ebene Magnetfelder können durch eine komplexe Funktion, das komplexe Potential,

$$(1.5) \quad F(w) = A(u,v) + i \psi(u,v) \quad , \quad w = u + i v$$

beschrieben werden. Der Zusammenhang mit der üblichen Darstellung ist der folgende. Der Realteil $A(u,v)$ ist die zur w -Ebene senkrechte Komponente des Vektorpotentials $\vec{A}$; die übrigen Komponenten sind hier null. Der Imaginärteil $\psi(u,v)$ ist das skalare Potential. In stromfreien Gebieten ($\text{rot } \vec{B} = 0$) ist $F(w)$ holomorph (= komplex differenzierbar). Realteil und Imaginärteil sind dann durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen miteinander verknüpft. Die magnetische Feldstärke $\vec{B} = (B_u, B_v)$ erhält man durch Differentiation

$$(1.6) \quad F'(w) = B_v + i B_u \quad , \quad |F'(w)| = |\vec{B}|$$

Die durch

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \text{Re } F(w) &\equiv A(u,v) = \text{konst.} \quad , \\ \text{Im } F(w) &\equiv \psi(u,v) = \text{konst.} \quad , \end{aligned}$$

definierten Kurven sind die Feldlinien, bzw. Äquipotentiallinien

des Magnetfeldes.

Das vorliegende Problem läßt sich damit so formulieren. Es wird ein einfach zusammenhängendes Gebiet G mit dem Rand C und ein Potential $\bar{F}(w)$ mit folgenden Eigenschaften gesucht:
Der Rand C ist Feldlinie, also mit (1.7)

$$(1.8) \quad \operatorname{Re} F(w) = \text{konst.}_1, \quad \text{für } w \in C.$$

Die Magnetfeldstärke auf C ist konstant, d.h. mit (1.6)

$$(1.9) \quad |F'(w)| = \text{konst.}_2, \quad \text{für } w \in C.$$

Schließlich soll noch gelten

$$(1.10) \quad F(w) = 0, \quad \text{für } w \notin G \cup C.$$

Falls (1.8) gilt, ist diese Bedingung immer erfüllbar, und zwar gilt (1.10) genau dann, wenn durch C ein Strom mit einer Stromdichte⁺

$$(1.11) \quad j^* = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \{ F'(w) \cdot n \}, \quad n = n_u + i n_v,$$

fließt, wie aus (1.1) mit (1.6) folgt. (n_u, n_v) ist der äußere Normaleneinheitsvektor von C .

Eine einfache Lösung dieses Problems kann man sofort angeben. Die Kreise $K_1 = \{ |w| = r_1 \}$, $K_2 = \{ |w| = r_2 \}$, $r_2 > r_1$ sind der Rand des zweifach zusammenhängenden Gebietes G_r . Durch K_1 , bzw. K_2 fließe der Strom I , bzw. $-I$ mit konstanter Stromdichte. Das Potential lautet

$$(1.12) \quad \bar{F}_r(w) = \begin{cases} \frac{2}{c} I \ln w & \text{für } r_1 \leq |w| \leq r_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

+) Die Stromrichtung wird positiv gerechnet in der Richtung
 $n_t = n_u \times n_v$. n_u, n_v sind Einheitsvektoren der w -Ebene.

Bezüglich G_r erfüllt diese Funktion die Bedingungen (1.8), (1.9) und (1.10). Anwendungen sind der Z-pinch und der tubular pinch. Die Lösung ist von den Kreisradien r_1, r_2 unabhängig. Für $r_1=0, r_2=\infty$ ist $F_r(w)$ das Potential eines Stromes I durch einen (unendlich dünnen) Draht an der Stelle $w=0$.

Für das vorliegende M+S Problem ist damit eine Lösung für das Gebiet G_1 gefunden. Der äußere Rand C_1 des Plasmas wird ein Kreis, der Rückleiter L_1 ein Kreiszylindermantel mit konstanter Stromdichtebelegung. Die eigentliche Schwierigkeit bei dem M+S Problem liegt nun darin, eine weitere Lösung für ein geeignetes Gebiet G_0 zu finden. Ist C_1 als Kreis gewählt, so muß der wegen (1.4) mit C_1 längengleiche Rand C_0 einen wellenartigen Verlauf haben, da C_1 die Kurve C_0 umschließt.

Zunächst bietet sich die Möglichkeit, durch analytische Fortsetzung Lösungen zu suchen, wie es von Gorenflo⁶ durchgeführt wurde. Man gibt ein geeignetes Gebiet G_0 mit dem Rand C_0 , sowie das Magnetfeld $F(w)$ auf dem Rand C_0 vor und setzt $F(w)$ ins Innere von G_0 analytisch fort. Falls der Rand C_0 analytisch ist, existieren immer Lösungen. Man kann $F(w)$ dann immer ein Stück ins Innere fortsetzen und längs einer dem Rand benachbarten Feldlinie eine Außenstromverteilung bestimmen. Nachteilig ist, daß dabei zu verschiedenen vorgegebenen Plasmarandkurven C_0 immer andere Außenstromverteilungen gehören. Es ist aber wünschenswert, umgekehrt zu fest vorgegebenen Außenstromverteilungen alle möglichen Lösungen, d.h. Gebiete G_0 mit Gleichgewichtsrandkurven C_0 zu bestimmen.

Die Lösungsmethode, die hier benutzt werden wird, leistet das zwar im allgemeinen auch nicht, jedoch wenigstens in dem speziellen Fall, daß die Außenströme Ströme durch endlich viele Drähte sind. Vom experimentellen Standpunkt her gesehen kommen aber gerade Drahtleiteranordnungen besondere Bedeutung zu, da sie es gestatten, definierte Außenstromverteilungen zu erzeugen.

1.3. Die Lösungsmethode am Beispiel einer speziellen Drahtleiteranordnung.

Aus Gründen der Einfachheit wird die Lösungsmethode an Hand einer einfachen Drahtleiteranordnung dargestellt. Lösungen für beliebige

Drahtstromverteilungen und für allgemeine Außenstromverteilungen werden in Kap.3 behandelt.

Bei dem M+S Problem interessiert man sich besonders für Lösungen mit symmetrischen Randkurven C_0 , die bei Drehungen um den Winkel $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, ($n > 1$, ganz) in sich übergehen. Als Beispiel wird daher eine Stromverteilung mit einer solchen Symmetrie gewählt; sie besteht aus gleichen Strömen durch n gleichmäßig auf dem Umfang eines Kreises mit dem Radius R angebrachten Drähten. Wie aus (1.12) ersichtlich hat somit das gesuchte Potential $F(w)$ in G_0 n isolierte logarithmische Singularitäten an den Stellen $R_\nu = R e^{i\frac{\nu}{n}2\pi}$, $\nu = 1, \dots, n$ und ist im übrigen holomorph.

Die Lösung erhält man in zwei Schritten. Es sei G_K der Einheitskreis mit dem Rand C_K in der z -Ebene. Man kann ein Potential $f(z)$ finden, das an den Stellen $a_\nu = a e^{i\frac{\nu}{n}2\pi}$, $\nu = 1, \dots, n$ mit $0 \leq a < 1$ logarithmische Singularitäten mit Strömen j hat und bezüglich G_K die Bedingung (1.8), d.h. daß C_K Feldlinie ist, erfüllt. Sie lautet

$$(1.13) \quad h(z) = \frac{2}{c} j \sum_{\nu=1}^n \left\{ \ln(z - a e^{i\frac{\nu}{n}2\pi}) - \ln(z - \frac{1}{a} e^{i\frac{\nu}{n}2\pi}) - \ln a \right\}, \quad 0 \leq a < 1.$$

Diese Funktion entsteht dadurch, daß man dem Potential der n Ströme j an den Stellen a_ν ein Potential sogenannter Bildströme an den Stellen^{+) $\frac{1}{a_\nu}$} hinzufügt. Die in $h(z)$ noch freie additive Konstante ist so gewählt worden, daß $h(z)$ auch im Grenzfall $a=0$ definiert ist. Durch die Bildströme wird erreicht, daß C_K Feldlinie wird. Das kann man, wie folgt, einsehen. Zunächst erhält man für $h(z)$ nach Ausführung der Summierung

$$(1.14) \quad h(z) = \frac{2}{c} j \ln \frac{z^n - a^n}{a^n z^n - 1}$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$(1.15) \quad |z^n - z_0^n| = |z^n \bar{z}_0^n - 1|, \quad \text{für } z = e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ n \text{ ganz, } z_0 \text{ komplex,}$$

+) $\bar{a}$ ist das zu a konjugiert komplexe.

beweist man dann die Behauptung

$$(1.16) \quad \operatorname{Re} h(e^{iy}) = 0, \quad 0 \leq y < 2\pi,$$

d.h. mit (1.7), C_K ist Feldlinie.

Die Bedingung (1.10) wird dadurch erfüllt, daß der Rand C_K mit einer Strombelegung j^* gemäß (1.11)

$$(1.17) \quad j^*(y) = -\frac{c \cdot j}{4\pi \cdot |j|} |h'(e^{iy})|, \quad 0 \leq y < 2\pi$$

versehen wird. Damit ist ein Potential

$$(1.18) \quad f(z) = \begin{cases} h(z) & \text{für } |z| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

gefunden, das bezüglich G_K (1.8) und (1.10) erfüllt und im Innern von G_K n isolierte logarithmische Singularitäten der vorgeschriebenen Symmetrie hat.

Die wesentliche Bedingung (1.9), die Forderung konstanter Stromdichte j^* auf dem Rand C_K , ist, wie man aus (1.17) ersieht, nicht erfüllt.

Bildet man nun den Einheitskreis G_K auf ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet G der w -Ebene konform ab, so geht $f(z)$ über in $F(w)$. Die Funktion $F(w)$ ist wieder ein Potential. Sie erfüllt bezüglich G die Bedingungen (1.8) und (1.10) und hat in G n isolierte Singularitäten. Unter diesen Abbildungen sucht man jetzt eine auf ein Gebiet G_0 derart, daß das Potential $F(w)$ in G_0 die Bedingung (1.9) erfüllt (Abb.3). Es wird also eine Abbildungsfunktion $w = g(z)$ mit folgenden Eigenschaften gesucht:

$$(1.19) \quad w = g(z), \quad \begin{array}{l} \text{holomorph für } |z| \leq 1, \\ g'(z) \neq 0 \text{ für } |z| < 1 \end{array}$$

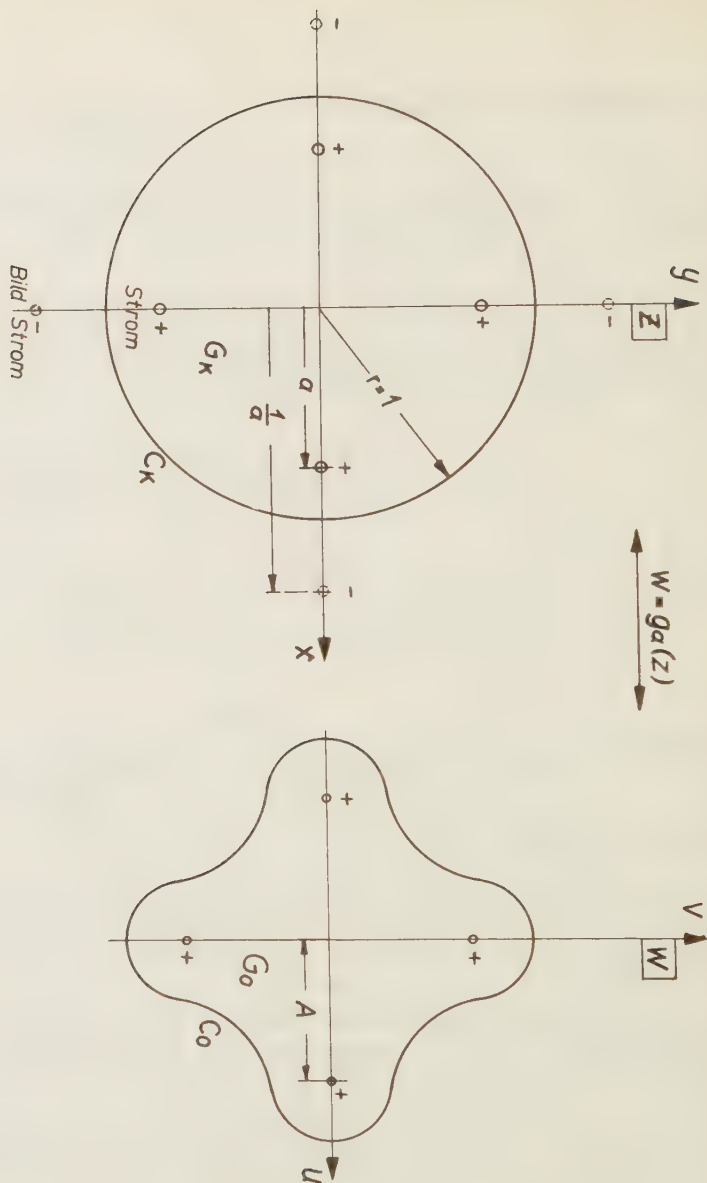


Abb.3 Der Einheitskreis G_K der z -Ebene wird durch $w = g_a(z)$ auf G_0 in der w -Ebene abgebildet. C_0 , das Bild von C_K , ist Gleichgewichtskurve.

Die Voraussetzung $g'(z) \neq 0$ ist notwendig und hinreichend für die lokale Umkehrbarkeit oder Konformität der Abbildung. Daraus folgt allerdings nicht die globale Eineindeutigkeit der Abbildung oder mit anderen Worten, die Funktion $w = g(z)$ ist in G_K nicht notwendig schlicht⁺). Da nur schlichte Abbildungen zu physikalisch sinnvollen Potentialen führen, hat man jede Lösung auf ihre Schlichtheit zu prüfen.

In jedem Punkt existiert die Umkehrfunktion $z = \check{g}(w)$, für deren Ableitung gilt

$$(1.20) \quad \check{g}'\{g(z)\} = \frac{1}{g'(z)}$$

Das Potential $f(z)$ geht bei der Abbildung über in

$$(1.21) \quad F(w) = f\{\check{g}(w)\}$$

Die Abbildung soll jetzt so gewählt sein, daß (1.9) auf dem Rand des Bildgebietes $C = \{w = g(e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ erfüllt ist:

$$(1.22) \quad \text{konst.} = |F'(w)| = |f'(z)| \cdot |\check{g}'(w)|, \quad \begin{matrix} z = e^{i\varphi}, \\ w = g(e^{i\varphi}), \end{matrix} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Daraus folgt mit (1.20) für $\check{g}'(z)$ die Bedingung

$$(1.23) \quad |g'(e^{i\varphi})| = \text{konst.} \cdot |f'(e^{i\varphi})|, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist mit (1.17) bekannt. Zusammen mit den Voraussetzungen (1.19) ist damit die gesuchte Funktion eindeutig bis auf einen Phasenfaktor $e^{i\phi_0}$ und eine additive Konstante bestimmt. Der Beweis dazu wird in Kap. 3 geliefert.

In dem vorliegenden speziellen Beispiel (1.18) kann $g(z)$ direkt

+) $f(z)$ ist schlicht in G , falls mit $z_1, z_2 \in G$ aus $z_1 \neq z_2$ folgt $f(z_1) \neq f(z_2)$.

bestimmt werden, wie überhaupt immer dann, wenn $f(z)$ lediglich isolierte logarithmische Singularitäten in G_K hat und damit $f'(z)$ eine rationale Funktion ist.

Zunächst wird $g'(z)$ konstruiert. Dieses geschieht in einfacher Weise mit Hilfe der Funktion $f'(z)$, für die sich mit (1.18) ergibt

$$(1.24) \quad f'(z) = \begin{cases} \frac{2}{c} i \frac{n \cdot z^{n-1} (a^{2n} - 1)}{(z^n - a^n)(z^n a^n - 1)} & , \quad |z| \leq 1 , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gesucht wird eine Funktion $g'(z)$, die (1.19) erfüllt und auf dem Rand des Einheitskreises dem Betrage nach mit $f'(z)$ bis auf einen positiven Faktor übereinstimmt. $f'(z)$ selbst erfüllt (1.19) nicht, denn sie hat in G_K n Pole und eine $(n-1)$ -fache Nullstelle. Ersetzt man aber in $f'(z)$ die Faktoren

$$\begin{aligned} z^{n-1} &\longrightarrow 1 , \\ z^n - a^n &\longrightarrow z^n a^n - 1 , \end{aligned}$$

so ist die so gewonnene Funktion

$$(1.25) \quad g'(z) = \frac{L}{2\pi} \frac{1 - a^{2n}}{(z^n a^n - 1)^2}$$

bereits die gesuchte. Nach Konstruktion ist sie im Einheitskreis holomorph und von null verschieden. Außerdem bleibt bei den Substitutionen wegen (1.15) der Betrag der Funktion auf C_K erhalten. Somit sind (1.19) und (1.23) erfüllt. Alle Konstanten sind in L zusammengefaßt. L hat, wie später gezeigt wird, eine anschauliche Bedeutung.

Die Integration liefert die abbildende Funktion $w = g(z)$:

$$(1.26) \quad g(z) = \frac{L}{2\pi} \frac{1 - a^{2n}}{a \cdot n} \left\{ \frac{z \cdot a}{1 - z^n a^n} - \frac{n-1}{n} \sum_{v=1}^n e^{i \frac{v}{n} 2\pi} \ln(1 - z a e^{-i \frac{v}{n} 2\pi}) \right\} .$$

Die Integrationskonstante ist so gewählt, daß $g(0) = 0$ ist.

Das Potential $\bar{F}(w)$ im Bildgebiet G_0 ist durch (1.21) gegeben. Um es explizit berechnen zu können, benötigt man die Umkehrfunktion $z = \check{g}(w)$. Beachtet man, daß $\bar{F}(w)$ das Potential einer Stromverteilung aus n Drahtströmen an den Stellen $A_\nu = A e^{i \frac{\nu}{n} 2\pi}$, $\nu = 1, \dots, n$ und einer konstanten Strombelegung längs des Randes $C_0 = \{w = g(e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ des Bildgebietes ist, mit entgegengesetzt gleich großen Gesamtströmen, so erhält man für $\bar{F}(w)$ auch die folgende Darstellung

$$(1.27) \quad \bar{F}(w) = \frac{2}{c} i \left[\ln(w^n - A^n) - \frac{n}{L} \int_0^{2\pi} \ln\{w - g(e^{i\varphi})\} \cdot |g'(e^{i\varphi})| d\varphi \right].$$

1.4. Diskussion der Lösung.

Zur Diskussion der durch (1.26) erzeugten Plasmagleichgewichte ist die Kenntnis von $\bar{F}(w)$ nicht notwendig. Dazu reicht (1.26) völlig aus. Zunächst kann man sich davon überzeugen, daß $g(z)$, wie erwartet, dieselben Symmetrien wie $f(z)$ hat:

$$(1.28) \quad g\left(z e^{i \frac{2\pi}{n}}\right) = e^{i \frac{2\pi}{n}} g(z),$$

$$\overline{g(z)} = g(\bar{z})$$

Damit hat auch $\bar{F}(w)$ diese Symmetrieeigenschaften.

Die Plasmaoberfläche ist durch das Bild C_0 des Randes $C_K = \{z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ des Einheitskreises gegeben: $C_0 = \{w = g(e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Davon wurde bereits in (1.27) Gebrauch gemacht. Die Singularitäten A_ν von $\bar{F}(w) = \bar{f}(\check{g}(w))$ in der w -Ebene, d.h. die Orte der Ströme, sind die Bildpunkte der Singularitäten a_ν von $f(z)$ in der z -Ebene. Mit (1.28) gilt dafür

$$(1.29) \quad A_\nu = A e^{i \frac{\nu}{n} 2\pi}, \quad \nu = 1, \dots, n; \quad A = g(\alpha).$$

Den Druck p des Plasmas erhält man mit (1.3) aus dem Betrag der Stromdichte j^* an der Plasmaoberfläche. Für diese gilt nach (1.11), (1.20) und (1.21)

$$(1.30) \quad |j^*(\varphi)| = \frac{c}{4\pi} |f'(e^{i\varphi})| \cdot \frac{1}{|g'(e^{i\varphi})|}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Setzt man darin (1.24) und (1.25) ein, so findet man, wie verlangt, die konstante Stromdichte

$$(1.31) \quad |j^*(\varphi)| = \frac{n \cdot j}{L}$$

Da $n \cdot j$ der Gesamtstrom durch den Innenleiter und somit auch der Gesamtstrom längs des Plasmarandes C_0 ist, muß L gerade die Länge der Kurve C_0 sein. Diese anschauliche Bedeutung des in (1.25) eingeführten Faktors L kann man auch auf folgende Weise einsehen.

Nach Konstruktion ist der Rand C_0 Feldlinie konstanter Feldstärke. Das bedeutet, daß der Realteil $u(u, v)$ des Potentials $F(u, v)$ längs C_0 konstant ist und der Imaginärteil $\psi(u, v)$ proportional zur Bogenlänge s von C_0 wächst. Davon kann man sich mit (1.6), (1.7) und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, die die Ableitungen von $u(u, v)$ und $\psi(u, v)$ verknüpfen, überzeugen. Unter Verwendung von (1.21) gewinnt man damit für die Bogenlänge s von C_0 eine Parameterdarstellung

$$(1.32) \quad s(\varphi) = \alpha \cdot \operatorname{Im} f(e^{i\varphi}), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Führt man die Gesamtlänge der Kurve $\bar{L} = s(2\pi) - s(0)$ ein, so kann der Proportionalitätsfaktor α eliminiert werden. Setzt man noch $f(z)$ aus (1.18) ein, so findet man

$$(1.33) \quad s(\varphi) = \frac{L}{2\pi \cdot n} \operatorname{arctg} \frac{(1 - a^{2n}) \sin n\varphi}{(1 + a^{2n}) \cos n\varphi - 2a^n}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Die Beziehung zwischen Bogenlänge s und dem Kurvenparameter φ

$$(1.34) \quad \frac{ds}{d\varphi} = \left| \frac{d}{d\varphi} g(e^{i\varphi}) \right|$$

erlaubt es nun nachzuprüfen, daß der in (1.26) eingeführte Faktor L mit dem in (1.33) definierten identisch ist.

Die Größe a , die die Lage der Singularitäten a_ν in der z -Ebene bestimmt, kann nach Definition die Werte $0 \leq a < 1$ annehmen. Sie erscheint in $g(z)$ als Parameter. Um das anzudeuten, wird $g(z)$, wenn nötig, mit einem Index a versehen: $w = g_a(z)$. Es liegt also bei dieser speziellen Anordnung eine einparametrische Schar von Lösungen mit Randkurven C_0 gleicher Länge vor, falls L festgehalten wird. Eliminiert man L mit Hilfe von (1.29), so erhält man die Lösungskurven in Abhängigkeit von a und H ; durch H ist die Lage der Ströme gegeben.

Für diesen Fall soll jetzt ein Überblick über die Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter a und der Zahl n der Ströme bei festem H , d.h. fester Lage der Ströme, gewonnen werden. Zunächst sind in Abb.4a-d einige charakteristische Lösungskurven für verschiedene n dargestellt.

Die erste wichtige Frage ist die nach der Schlichtheit der Abbildungsfunktionen $g_a(z)$. Für $n=1$ wird $g_a(z)$ eine lineare Abbildung. Für jedes a ist das Bildgebiet wieder ein Kreis. Für $n > 1$ kann man sich eine grobe Vorstellung durch Diskussion der Grenzfälle $a \ll 1$ und $a=1$ verschaffen. Im ersteren Fall ergibt sich die lineare, schlichte Abbildung

$$(1.35) \quad g_{a \ll 1}(z) = \frac{H}{a} z$$

Die Bildkurven C_0 sind Kreise mit Radien $\frac{H}{a}$. Die Radien sind groß gegen den Abstand der Drähte. Die n Ströme erscheinen dann

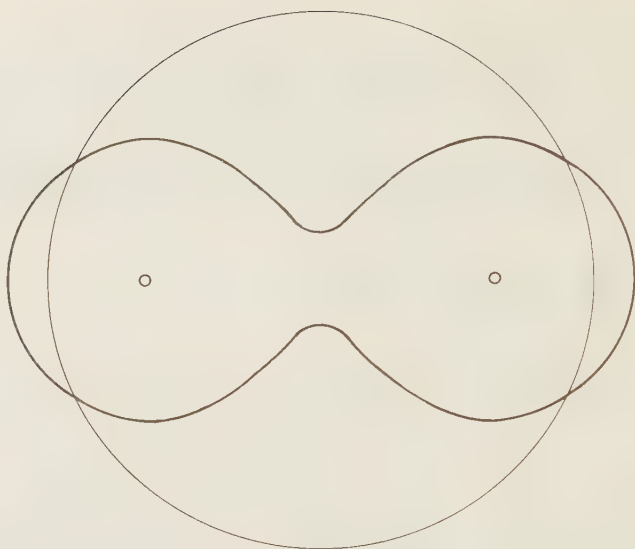


Abb.4a $n=2, a=0.93$

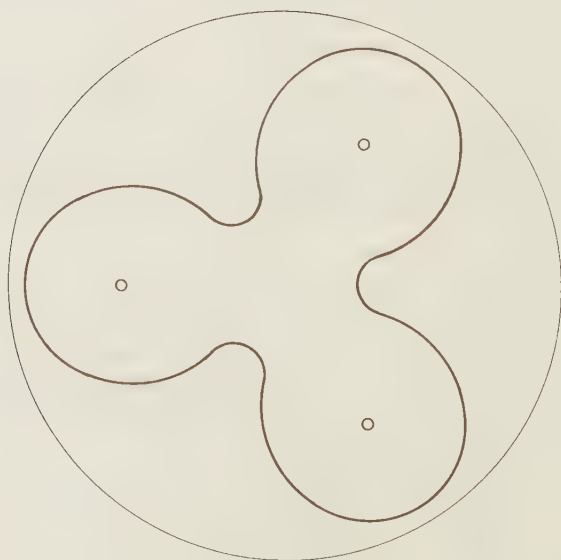


Abb.4b $n=3, a=0.93$

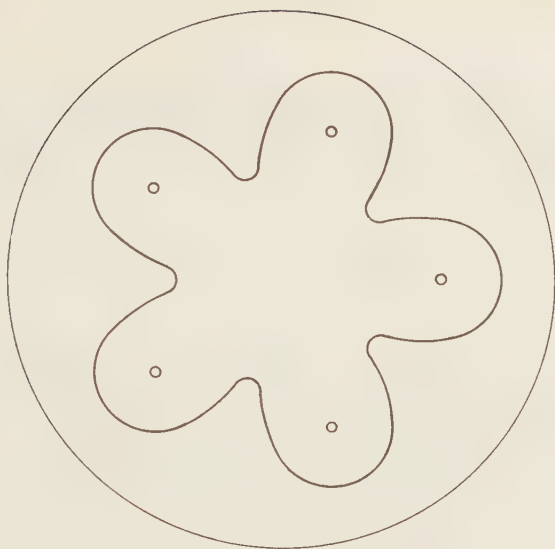


Abb.4c $n=5$, $a=0.94$

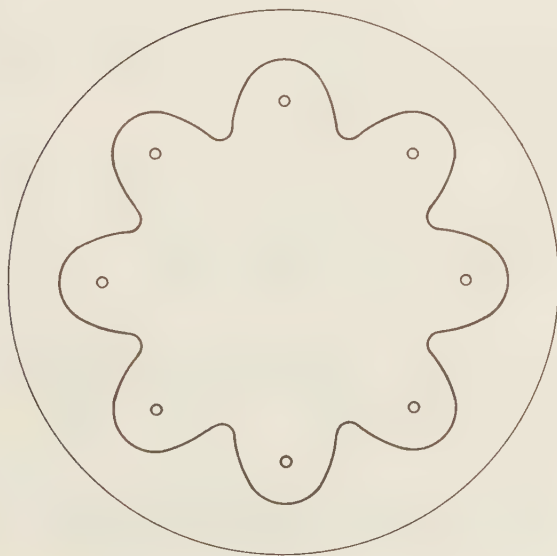


Abb.4d $n=8$, $a=0.94$

Abb.4a-d M+S Hohlzylindergleichgewichte. Hinleiter sind n Drähte, der Rückleiter ist ein Kreiszylindermantel. Für $n=2$ gibt es keine brauchbare Lösung.

als ein Strom $n \cdot j$ durch einen Punkt, und man erhält als Randkurven Kreise wie in (1.12). Im zweiten Grenzfall $a=1$ wird der Rand des Bildgebietes durch n Kreise gebildet (Anhang II):

$$(1.36) \quad g_{a=1}(e^{iy(s)}) = \frac{L}{2\pi \cdot n} e^{i \frac{K}{n}} (1 + e^{+i \frac{2\pi n}{L} s}) \quad , \quad 0 \leq s \leq L,$$

mit $K=1, \dots, n$ derart, daß $\frac{K-1}{n}L \leq s < \frac{K}{n}L$ ist. Der Parameter ist die Bogenlänge der Kurve. Diese Kreise überlappen sich, der Rand ist nicht einfach geschlossen. Die Abbildung ist damit nicht schlicht und als unphysikalisch auszuschneiden. Um die Abbildung eineindeutig zu machen, muß man Verzweigungsschnitte anbringen. Wächst a von null stetig an, so gehen die schlichten Lösungen (1.35) stetig in die nicht schlichten von (1.36) über. Zur Erläuterung findet man in Abb. 5a-d Lösungen für $n=4$ und verschiedene Parameterwerte a .

Man kann zeigen, daß es ein $a_s(n)$ derart gibt, daß $g_a(z)$ im abgeschlossenen Einheitskreis für $0 < a < a_s(n)$ schlicht ist. Für alle anderen a ist $g_a(z)$ nicht schlicht (Anhang I). $a_s(n)$ ist bestimmt durch die Gleichungen

$$(1.37) \quad \begin{aligned} a_s^n \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y_0}{2} + n y_0\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y_0}{2}\right), \\ \operatorname{Im} \left\{ e^{-i \frac{\pi}{n}} g_{a_s}(e^{iy_0}) \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem ist nur näherungsweise möglich. Man kann eine grobe Abschätzung für $a_s(n)$ herleiten:

$$(1.38) \quad a_s(n) > \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2n} \operatorname{arctg} \frac{n}{n-1}\right), \quad \text{für } n > 2$$

Im Falle $n=2$ ist $a_s(2) = 1$; d.h. die Lösungen sind schlicht, ausgenommen für $a=1$, wo der Rand aus zwei nebeneinanderliegenden gleichen Kreisen, die sich in einem Punkt berühren, besteht. Für $n > 2$ ist $a_s(n) < 1$.

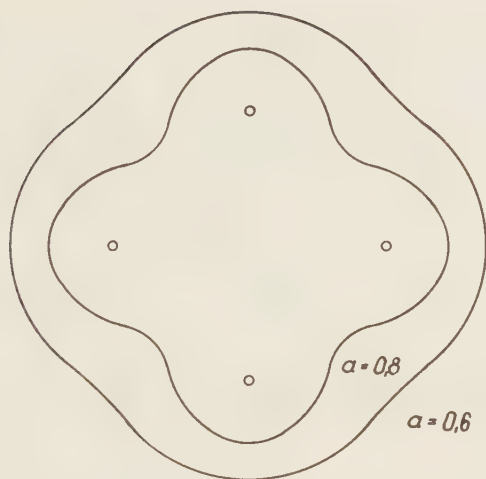


Abb. 5a $n=4$

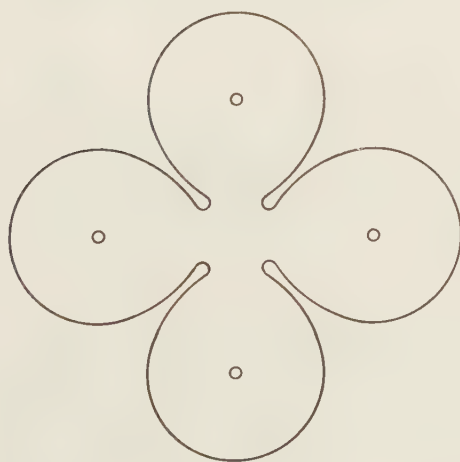


Abb. 5b $n=4, a=0.98$

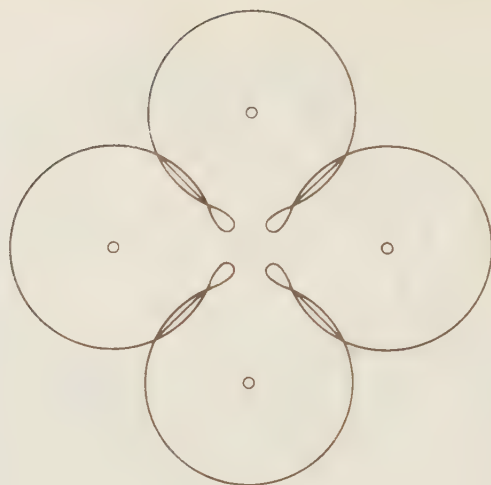


Abb. 5c $n=4$, $a=0.99$

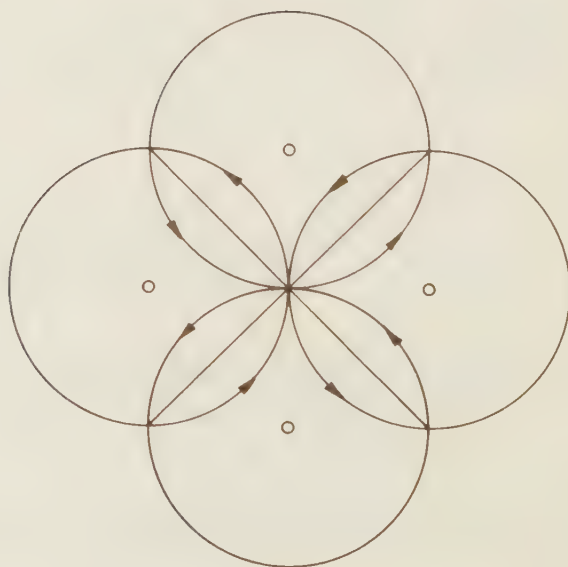


Abb. 5d $n=4$, $a=1.0$

Abb. 5a-d M+S Plasmainnenrand bei einer Leiteranordnung aus $n=4$ Drähten für verschiedene Parameterwerte a . Bei nicht schlichten Lösungen sind Verzweigungsschnitte eingezeichnet.

Die zweite zu klärende Frage ist, ob die gefundenen Lösungen für die M+S Konfiguration geeignet sind. Der "äußere" Rand C_1 des Plasmas ist als Kreis mit dem Umfang L vorgegeben. Es gibt genau dann M+S Lösungen, wenn Abbildungen $g_a(z)$ existieren derart, daß das Bildgebiet G_0 mit dem Rand C_0 ganz im Innern eines wegen (1.4) umfangreichen Kreises liegt, d.h. wenn die Ungleichung gilt

$$(1.39) \quad \text{Max} \{ |g_a(e^{iy})| \} < \frac{L}{2\pi}, \quad 0 \leq y < 2\pi.$$

Entwickelt man hierin $g_a(z)$ in eine Reihe und beachtet man $\text{Max} \{ |g_a(e^{iy})| \} = g_a(1)$, so findet man, daß (1.39) erfüllt ist für

$$a > a_{MS}(n)$$

wobei $a_{MS}(n)$ durch

$$(1.40) \quad a_{MS}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{MS}^{nk}}{(kn+1)(kn+2n+1)} = \frac{1}{n^2-1}, \quad n > 1$$

gegeben ist (Anhang III). Für $n=1$ gibt es natürlich keine Lösung, da C_0 kein Kreis sein kann. Im Falle $n=2$, in dem $a_{MS}(2) = 1$ ist, gibt es ebenfalls keine Lösung, es sei denn, man läßt zu, daß sich die Plasmarandkurven C_0 und C_1 berühren dürfen. Dann erhält man für $n=2$ allein die in Abb.6 skizzierte Konfiguration. Für $n > 2$ ist $a_{MS}(n) < 1$.

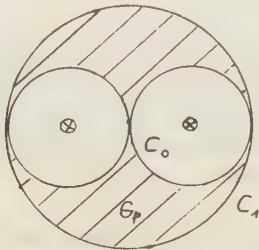


Abb.6 M+S Konfiguration für Leiteranordnung aus zwei Drähten und einem Kreiszyklindermantel.

Faßt man die Forderung nach Schlichtheit und die M+S Bedingung zusammen, so folgt, daß im Parameterintervall $a_s(n) > a > a_{MS}(n)$ brauchbare Lösungen liegen. Das Intervall ist nicht leer, da $a_s(n) > a_{MS}(n)$ ist, wie der genauere Vergleich von (1.40) und (1.38) ergibt

Unter den Lösungen gibt es ein C_0 mit minimaler Länge L_{min} für feste Lage der Außenströme (Anhang IV). Der dazugehörige Parameterwert a_{min} ist gegeben durch

$$(1.41) \quad \frac{1}{n-1} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2nK+1}{(Kn+1)(Kn-n+1)} a_{min}^{2nK}$$

Nach (1.31) wird in diesem Fall die Oberflächenstromdichte maximal und mit (1.3) auch der Gleichgewichtsdruck:

$$(1.42) \quad p_{max} = \frac{2\pi}{c^2} \left(\frac{j \cdot n}{A} \right)^2 \tilde{g}^2(a_{min})$$

mit

$$(1.43) \quad \tilde{g}(a) = \frac{1}{2\pi n} \left\{ a - \frac{n-1}{n \cdot a} (1-a^{2n}) \sum_{\nu=1}^n e^{i \frac{\nu}{n} 2\pi} \ln(1-a^2 e^{i \frac{\nu}{n} 2\pi}) \right\}$$

1.5. Drahtleiter als Hin- und Rückleiter.

Man gelangt zu einer weiteren M+S Hohlzylinderkonfiguration, wenn man den Außenleiter L_1 , der bisher ein Kreiszylindermantel war, durch eine Anordnung aus Drahtleitern ersetzt. Dazu hat man analog zu Kap. 1.3 das Problem für ein einfach zusammenhängendes Gebiet G_1 , das den unendlich fernen Punkt enthält, zu lösen.

Als Beispiel wird wieder eine einfache Anordnung aus n Drähten, die in gleichen Abständen auf dem Umfang eines Kreises mit dem Radius B liegen, behandelt. Man bestimmt zunächst in der

z-Ebene das Potential $f_b(z)$, das die Bedingungen (1.8) und (1.10) für das Gebiet $G_{\bar{K}} = \{|z| > 1\}$ mit dem Rand $C_{\bar{K}} = \{|z| = 1\}$ erfüllt und an den Stellen $b_\nu = b e^{i\frac{\nu}{n}2\pi}$, $\nu = 1, \dots, n$ isolierte Singularitäten mit gleichen Strömen j hat. Das leistet ebenfalls die Funktion $h(z)$ aus (1.14), nur daß Ströme und Bildströme vertauscht werden (Abb.7).

$$(1.43) \quad f_b(z) = \begin{cases} \frac{2}{c} j \ln \frac{z^n - b^n}{b^n z^n - 1} & , \quad |z| \geq 1, \quad b > 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus gewinnt man die Ableitung der dazugehörigen abbildenden Funktion:

$$(1.44) \quad g'_b(z) = \frac{L}{2\pi} (b^{2n} - 1) \frac{z^{2n}}{(z^n b^n - 1)^2} \quad , \quad b > 1$$

Diese Funktion ist für $|z| \geq 1$ holomorph und von null verschieden und erfüllt (1.23). Die Integration liefert

$$(1.45) \quad g_b(z) = \frac{L}{2\pi} \frac{b^{2n} - 1}{b^{2n+1}} \left\{ bz - \frac{1}{n} \frac{bz}{b^n z^n - 1} + \right. \\ \left. + \frac{n+1}{n^2} \sum_{\nu=1}^n e^{i\frac{\nu}{n}2\pi} \ln \left(1 - \frac{1}{bz} e^{i\frac{\nu}{n}2\pi} \right) + \frac{n+1}{n^2} \sum_{\nu=1}^n e^{i\frac{\nu}{n}2\pi} \ln z b \right\}$$

Die Integrationskonstante ist so gewählt, daß $g_b(z)$ für $n > 1$ dieselben Symmetrieeigenschaften (1.28) wie $g_a(z)$ hat. Der Rand des Bildgebietes G_1 ist $C_1 = \{w = g_b(e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Die Singularitäten, d.h. die Ströme des Potentials $F_b(w)$ in der w-Ebene sind gegeben durch

$$(1.46) \quad B_\nu = B e^{i\frac{\nu}{n}2\pi}, \quad \nu = 1, \dots, n, \quad B = g(b)$$

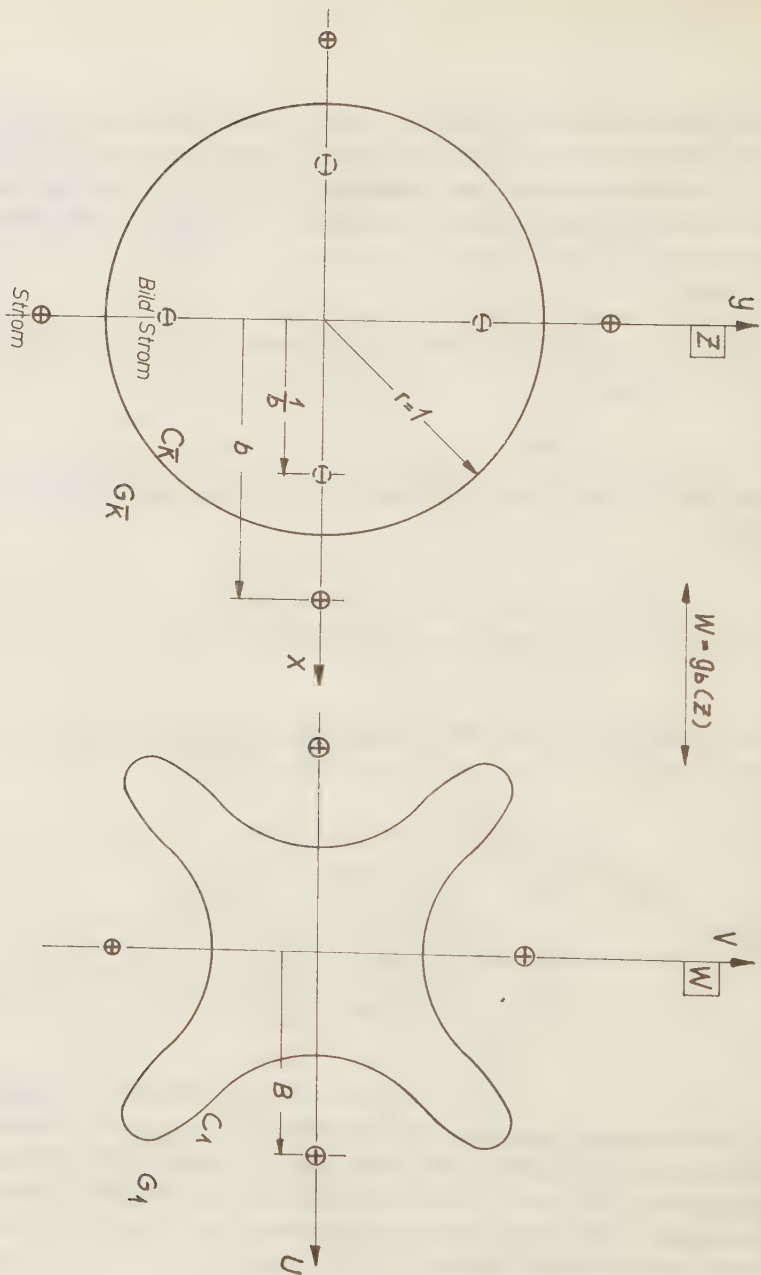


Abb.7 Abbildung $w = g_b(z)$ von $G_K = \{z \mid |z| > 1\}$ auf G_1 in der w -Ebene. G_1 , das Bild von C_K , ist Gleichgewichtskurve.

Für die Bogenlänge S von C_1 findet man die Parameterdarstellung

$$(1.47) \quad S = \frac{L}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{(b^{2n}-1) \cdot \sin ny}{(b^{2n}+1) \cos ny - 2b^n}, \quad 0 \leq y < 2\pi, \quad b > 1.$$

Die schon in (1.44) eingeführte Konstante L ist die Länge von C_1 .

$g_b(z)$ liefert für alle n einparametrische Lösungsscharen mit Parameter $1 < b < \infty$. Unter diesen sind nur Abbildungen, die über $G_{\bar{\kappa}} = \{|z| > 1\}$ schlicht sind, von Interesse. Im Falle $n=1$ existieren keine schlichten Lösungen. Der Rand C_1 ist wegen der Vieldeutigkeit des letzten Termes aus (1.45) nicht geschlossen, vielmehr gilt: $g_b(e^{i\gamma+2\pi i}) - g_b(e^{i\gamma}) = 2\pi i \gamma$ ($\gamma > 0$). In Abb. 9 ist der Fall $n=1$ erläutert.

Für $n \geq 2$ verschwindet der letzte Term von $g_b(z)$. Es gibt dann einfach geschlossene Randkurven C_1 und damit schlichte Abbildungen. In Abb. 8a-c findet man die Lösungen für $n=4$ und verschiedene b . Im Grenzfall $b \gg 1$ geht (1.45) in die schlichte lineare Abbildung

$$(1.48) \quad g_{b \gg 1}(z) = \frac{L}{2\pi} z$$

über. Die Randkurven C_1 werden Kreise. Für hinreichend kleine b ist $g_b(z)$ nicht mehr schlicht (Abb. 8c). Eine genauere Diskussion unterbleibt, da für die M+S Geometrie als Randkurven C_1 nur solche in Frage kommen, die nicht zu stark von einem Kreis abweichen. Durch Wahl von hinreichend großen b kann das immer erreicht werden. Die Abb. 10a-b zeigen Beispiele solcher M+S Gleichgewichte mit Drähten als Hin- und Rückleiter.

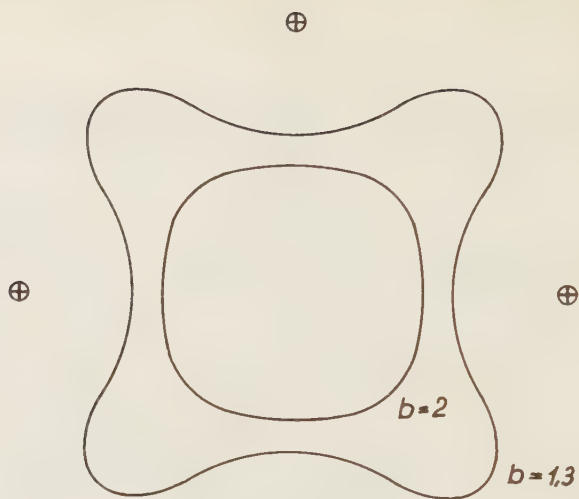


Abb. 8a $n=4$

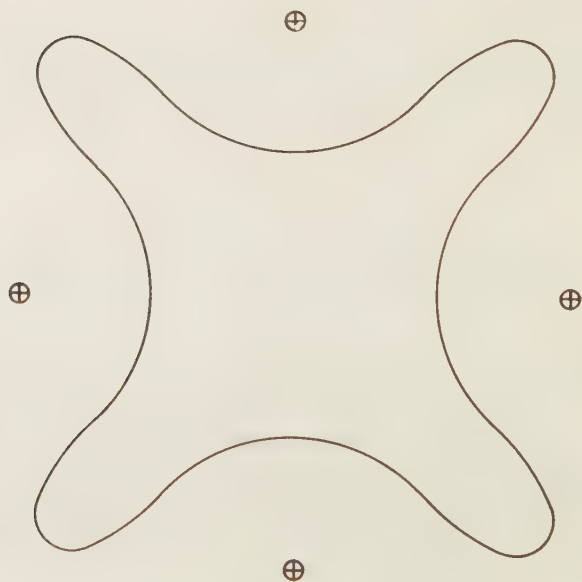


Abb. 8b $n=4, b=1.2$

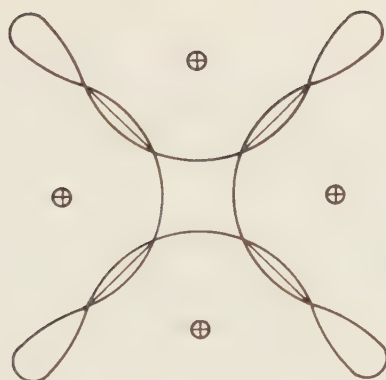


Abb. 8c $n=4$, $b=1.12$

Abb. 8a-c M+S Plasmaußenrand bei einer Leiteranordnung aus $n=4$ Drähten für verschiedene Parameterwerte b . Bei der nicht schlichten Lösung sind Verzweigungsschnitte eingezeichnet.

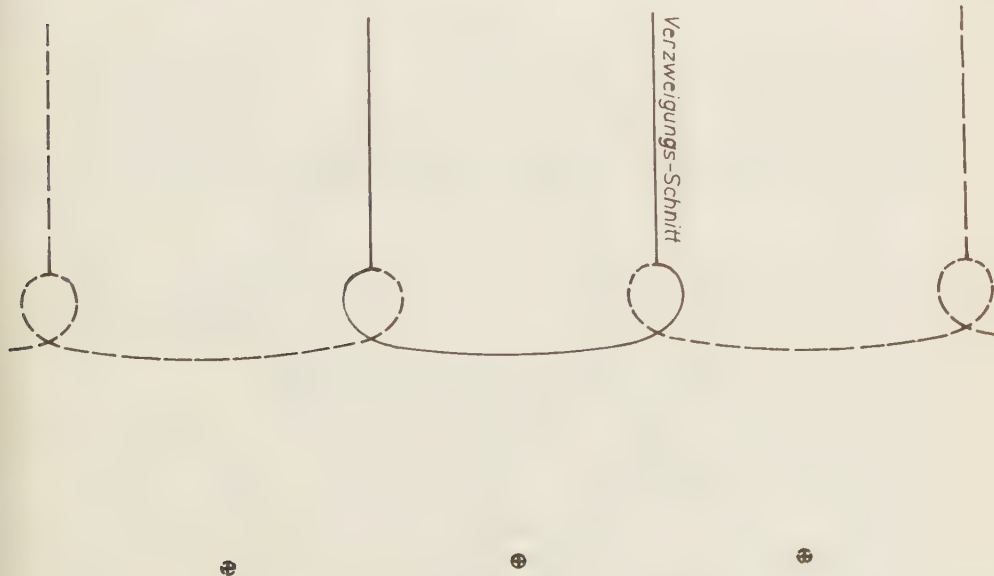


Abb. 9 Nicht schlichte Lösung für $n=1$, $b=3$

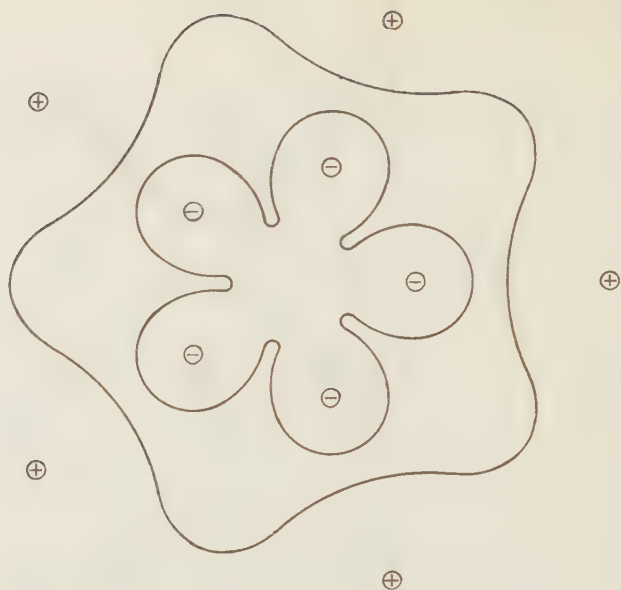


Abb.10a $n=5$, $a=0.97$, $b=1.30$

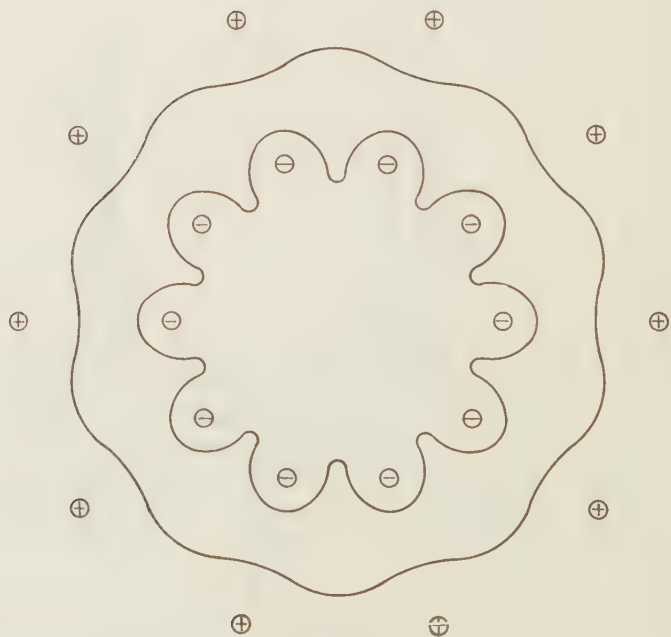


Abb.10b $n=10$, $a=0.96$, $b=1.20$

Abb.10a-b M+S Plasmaquerschnitte mit je n Drähten als Hin- und Rückleiter.

2. Lineare Cusp Anordnungen.

Als weitere Anwendung der Lösungsmethode werden elektrodenlose Gleichgewichtsanordnungen für ein feldfreies, einfach zusammenhängendes, zylindrisches Plasma ohne Stromkomponenten senkrecht zur Zylinderachse behandelt. Der Querschnitt des Plasmas ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet G_c , mit einfach geschlossenem Rand C_c (Abb.11). Da nur Oberflächenströme fließen und sich die Ströme im Plasma (im Unendlichen) schließen, verschwindet wegen der Divergenzfreiheit des Stromes der Gesamtstrom durch C_c . Durch C_c fließen Ströme beiderlei Vorzeichens. Da im Gleichgewicht die Stromdichte konstant ist, folgt die Unstetigkeit der Stromdichtebelegung auf dem Rand C_c als eine für ein solches Plasma charakteristische Eigenschaft.

Zwei solcher Konfigurationen, der lineare cusp und der "picket fence", bei denen das äußere Magnetfeld durch Drahtströme erzeugt wird, werden betrachtet.

2.1. Der lineare cusp.

Die Leiteranordnung für die Außenströme wird aus $2n$ geraden Drähten, die äquidistant auf dem Umfang eines Kreises mit dem Radius D liegen, gebildet. Die Ströme durch die Drähte sind dem Betrage nach gleich, die Stromrichtung alterniert, so daß der Gesamtstrom durch den Querschnitt verschwindet. Die Ströme schließen sich im Unendlichen.

Zu dieser Außenstromverteilung findet man die Lösung analog zu Kap.1. Das Potential

$$(2.1) \quad f_d(z) = \begin{cases} \frac{2}{c} j \left[\ln \frac{z^n - d^n}{z^n - \frac{1}{d^n}} - \ln \frac{z^n + d^n}{z^n + \frac{1}{d^n}} \right], & |z| \geq 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

erfüllt die Bedingungen (1.8) und (1.10) für das Gebiet $G_K = \{|z| > 1\}$ in der z -Ebene (Abb.11). An den Stellen $d_\nu = d e^{i \frac{\nu}{n} \pi}$ ($d > 1$) liegen die Singularitäten von $f_d(z)$ mit den Strömen $j_\nu = (-1)^\nu j$, $\nu = 1, 2n$. Daraus gewinnt man die Ableitung der abbildenden Funktion

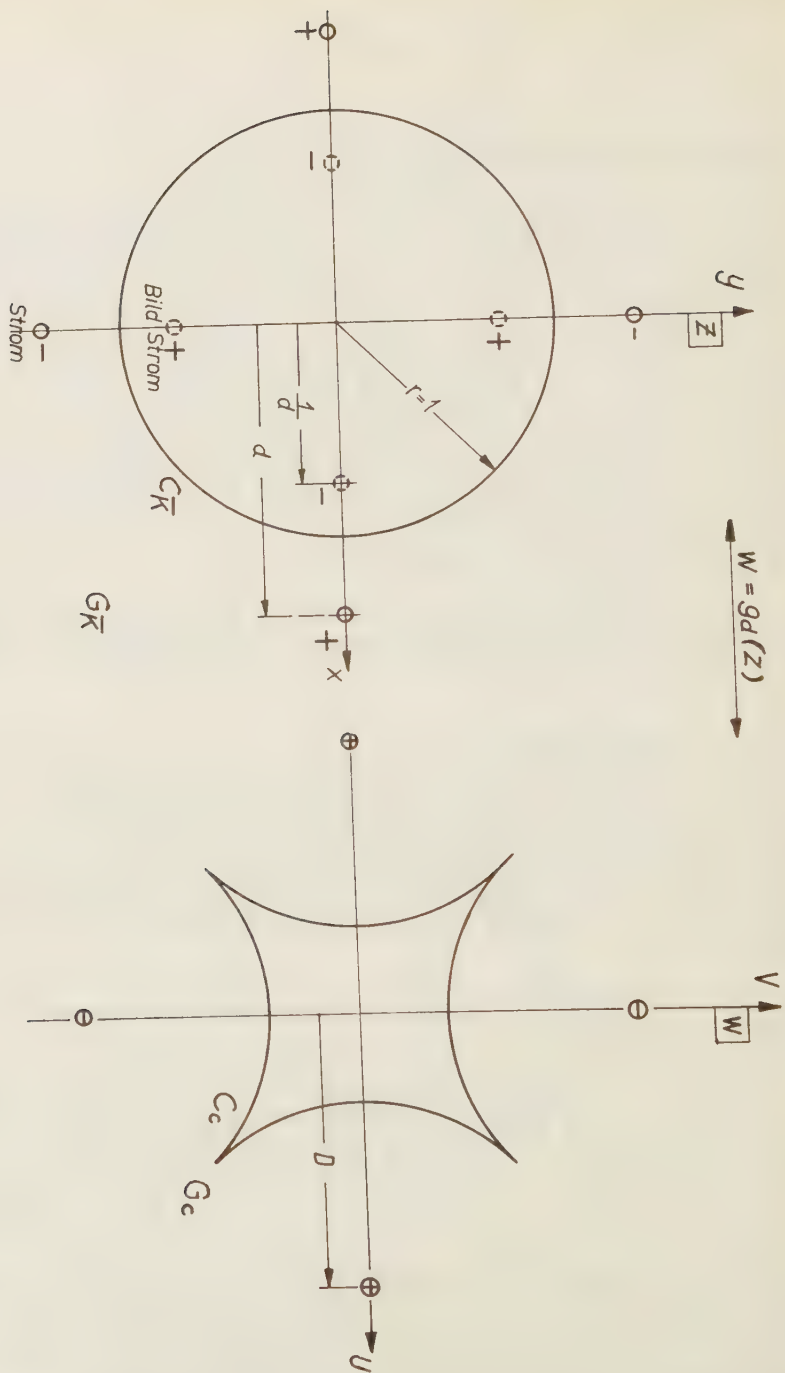


Abb.11 Abbildung $w=g_d(z)$ von $G_K = \{|z| > 1\}$ auf G_c . C_c ,
das Bild von C_K , ist Gleichgewichtskurve.

$$(2.2) \quad g'_d(z) = \frac{L_c d^n (d^{2n} - 1)}{2 \operatorname{arctg} \frac{2 d^n}{d^{2n} - 1}} \cdot \frac{z^{2n} (z^{2n} + 1)}{(z^{2n} d^{2n} - 1)^2}$$

Es ist zu beachten, daß $f'_d(z)$ auf dem Rand $C_{\bar{K}} = \{|z|=1\}$ $2n$ Nullstellen hat und damit wegen (1.23) notwendigerweise auch $g'_d(z)$. Der Rand ist also nicht analytisch. Das bedeutet, daß die Abbildung auf dem Rand $C_{\bar{K}}$ an $2n$ Stellen nicht konform ist. Die dazugehörigen Bildpunkte sind gerade die Unstetigkeitsstellen der Strombelegung auf dem Plasmarand C_c .

Die Integration ergibt

$$(2.3) \quad g_d(z) = \frac{L_c (d^{2n} - 1)}{2 d^{3n+1} \operatorname{arctg} \frac{2 d^n}{d^{2n} - 1}} \left[dz - \frac{d^{2n} + 1}{2n} \cdot \frac{dz}{d^{2n} z^{2n} - 1} + \right. \\ \left. + \left\{ 1 + \frac{1}{2n} (d^{2n} + 1) \right\} \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} e^{i \frac{\nu}{n} \pi} \ln \left(1 - \frac{1}{dz} e^{i \frac{\nu}{n} \pi} \right) \right].$$

Die Integrationskonstante ist so gewählt, daß $g_d(z)$ dieselben Symmetrieeigenschaften wie $f_d(z)$ hat; d.h. daß gilt

$$(2.4) \quad e^{i \frac{\pi}{2n}} g_d(z) = g_d(z e^{i \frac{\pi}{2n}}), \\ \overline{g_d(z)} = g_d(\bar{z}).$$

Der Rand des Bildgebietes G_c ist $C_c = \{w = g_d(e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Die Singularitäten des Potentials $F_d(w) = f(g_d(w))$ in der w -Ebene sind gegeben durch

$$(2.5) \quad D_\nu = D e^{i \frac{\nu}{n} \pi}, \quad \nu = 1, \dots, 2n \quad \text{mit} \quad D = g_d(d).$$

Für die Bogenlänge erhält man die Parameterdarstellung

$$(2.6) \quad s(y) = \frac{L_c}{4n \operatorname{arctg} \frac{2d^n}{d^{2n}-1}} \operatorname{arctg} \frac{2d^n \sin ny}{d^{2n}-1}, \quad -\frac{\pi}{2n} \leq y < \frac{\pi}{2n}.$$

Die Gleichung gilt nur in dem angeführten Intervall zwischen zwei Unstetigkeitsstellen der Strombelegung. Der schon in (2.2) eingeführte Faktor L_c ist die Länge von C_c .

In $g_d^{(2)}$ liegt eine einparametrische Lösungsschar mit Parameter $1 < d < \infty$ vor. Für $n=1$ sind die Abbildungen $g_d^{(2)}$ nicht schlicht. Für $n \geq 2$ ist $g_d^{(2)}$ für Parameterwerte

$$d \geq d_s(n) = \left(\frac{3n+1}{n-1} \right)^{\frac{1}{2n}}, \quad n \geq 2,$$

schlicht und damit physikalisch sinnvoll (Anhang V).

Im Grenzfall $d \gg 1$ erhält man Bildgebiete G_c mit Randkurven

$$(2.7) \quad C_c: g_{d \gg 1}^{(2)}(e^{iy}) = \frac{D}{d} \left(e^{iy} + \frac{1}{1-2n} e^{i(1-2n)y} \right), \quad 0 \leq y < 2\pi.$$

Darin ist L_c mit (2.5) durch D ersetzt worden: $L_c = \frac{4d}{D}$, ($d \gg 1$). Diese Randkurven sind Hypocykloiden. Rollt man in einem Kreis mit dem Radius $\frac{D}{d} \frac{2n}{2n-1}$ auf dessen Rand einen kleineren Kreis mit dem Radius $\frac{D}{d} \frac{1}{2n-1}$ ab, so beschreibt ein Punkt auf dem Umfang dieses Kreises die vorliegende Kurve.

In Abb.12a-b und Abb.13a-b sind in Abhängigkeit vom Parameter d für verschiedene n Beispiele von cusp-Gleichgewichten dargestellt. Abb.13b zeigt eine nicht schlichte Abbildung mit Verzweigungsschnitten

Die Stromdichte j_c^* auf dem Rand C_c erhält man aus (1.11) mit (2.2):

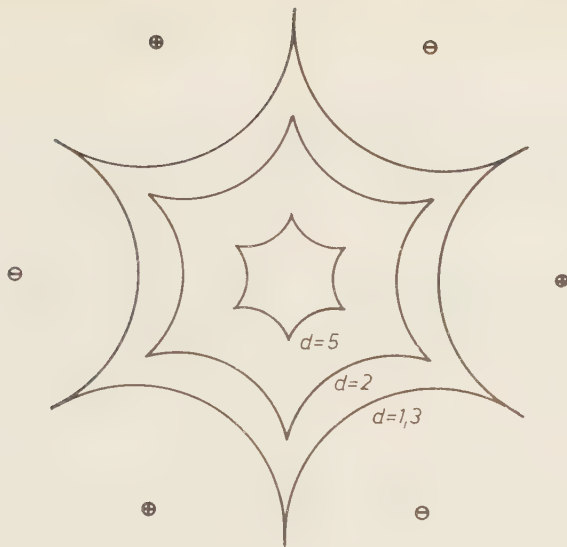


Abb. 12a

$n=3$

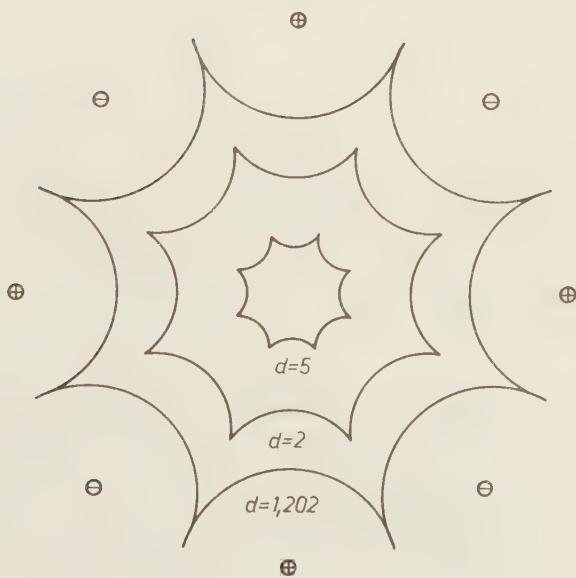


Abb. 12b

$n=4$

Abb. 12a-b Cuspgleichgewichte mit n Leiterpaaren für verschiedene Parameterwerte d . Für $d=1.3$, bzw. $d=1.202$ maximaler Plasmaquerschnitt und Druck $p_{\max}$.

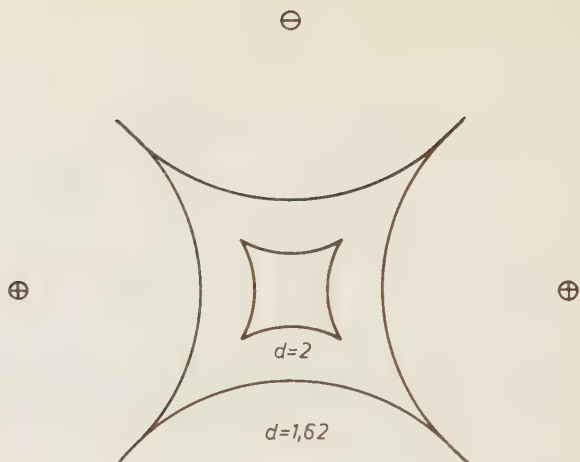


Abb. 13a $n=2$

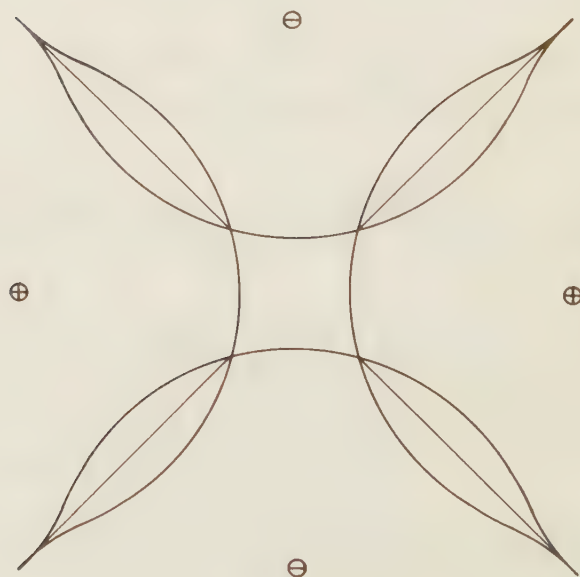


Abb. 13b $n=2, d=1.3$

Abb. 13a-b Cuspgleichgewichte mit $n=2$ Leiterpaaren. Bei $d=1.3$ nicht schlichte Lösung mit Verzweigungsschnitten.

$$(2.8) \quad j_c^* = -\frac{2n j}{2\pi D d^{3n-1}} \left[d^{2n} - 1 - \frac{1}{2n} + \left\{ 1 + \frac{1}{2n} (d^{2n} + 1) \right\} \frac{d^{2n} - 1}{2n d^2} \sum_{\nu=1}^{2n} e^{i \frac{\nu}{n} \theta} \ln \left(1 - \frac{1}{d^2} e^{i \frac{\nu}{n} \theta} \right) \right]$$

j_c^* ist eine für fallende $d > d_s(n)$ monoton steigende Funktion und erreicht für $d = d_s(n)$ ein Maximum. Das führt mit (1.3) zu einem maximalen Gleichgewichtsdruck

$$(2.9) \quad p_{max} = \frac{1}{2\pi c^2} \cdot \frac{j^2}{D^2} \cdot \alpha^2(n),$$

wobei man $\alpha(n)$ aus (2.8) gewinnt. Es ist $\alpha(2) = 1.97$, $\alpha(3) = 2.72$ und für $n \gg 1$ wird $\alpha(n) = n \cdot 0.72$. Für Drucke $p > p_{max}$ gibt es bei festen Außenströmen j kein Gleichgewicht für ein einfach zusammenhängendes Plasma. Die Gleichgewichtsgebiete für $p > p_{max}$ sind $2n$ -fach zusammenhängende Gebiete, deren Rand aus $2n$ Kreisen um die Außenstromdrähte gebildet wird.

2.2. Die "picket fence" Geometrie.

Die "picket fence" Geometrie ist eine Abart des linearen cusp. Die Außenleiteranordnung sind Drähte an den Stellen $A_{\nu\mu} = B \cdot \nu + i A_{\mu}$ mit Strömen $j_{\nu\mu} = j \cdot (-1)^\nu \mu$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ und $\mu = \pm 1$ (Abb. 14). Das Plasma ist einfach zusammenhängend. Der Rand, der sich ins Unendliche erstreckt, zerfällt in zwei Teile. Es genügt, das Gleichgewichtsproblem für den einen Teil des Randes zu lösen; wegen der Symmetrie der Anordnung folgt der zweite Teil durch Spiegelung an der reellen Achse.

In diesem Fall geht man in der z -Ebene von der oberen Halbebene $G_H = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$ aus. Man sucht das Potential $f_{p,n}(z)$, das in G_H bei $a_\nu = a \cdot i + \nu$ Singularitäten mit dazugehörigen Strömen $j_\nu = j \cdot (-1)^\nu$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ hat und das bezüglich G_H die Bedingungen (1.8) und (1.10) erfüllt, d.h. daß der Rand $C_H = \{ z : \operatorname{Im} z = 0 \}$ von G_H Feldlinie ist. Dieses Potential erhält man aus (2.1) für $n=1$ durch die konforme Abbildung $z = e^{-i 2\pi z'}$ mit $d = e^{2\pi a}$, die ~~das Äußere des Einheitskreises~~ die z -Ebene auf den Streifen $K \leq \operatorname{Re} z' < K+1$, (K ganz) der z' -Ebene abbildet. Ersetzt man z' wieder durch z' , so ergibt sich

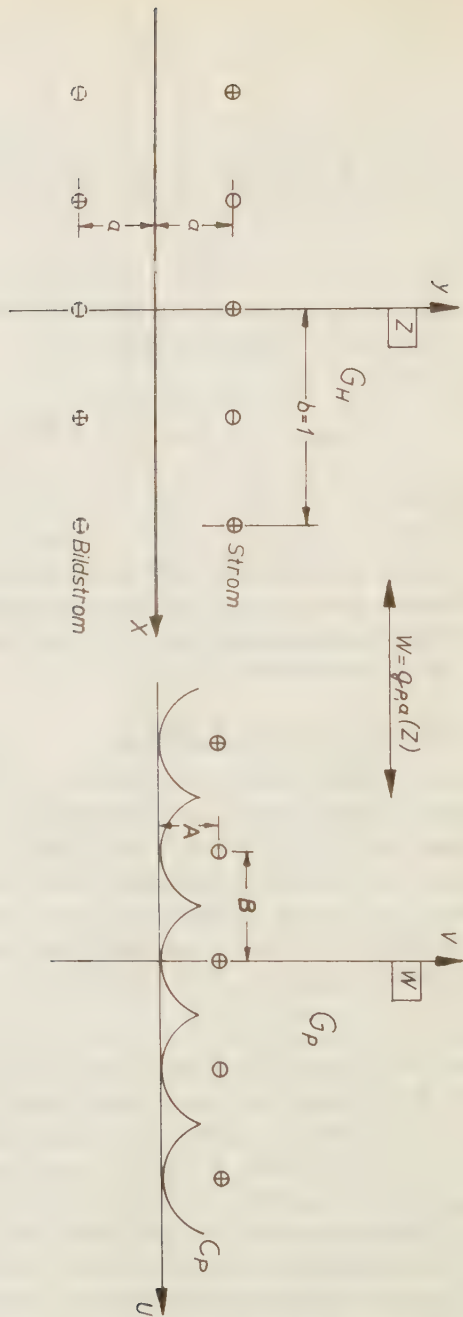


Abb.14 Abbildung $w = g_{p,a}(z)$ von $G_H = \{Im z > 0\}$ auf G_p in der w -Ebene. C_p , das Bild von C_H , ist "picket fence" Gleichgewichtskurve.

$$(2.10) \quad f_{p,a}(z) = \begin{cases} \frac{2}{c} j \left[\ln \frac{e^{-2\pi i z} - e^{2\pi a}}{e^{-2\pi i z} - e^{-2\pi a}} - \ln \frac{e^{-2\pi i z} + e^{2\pi a}}{e^{-2\pi i z} + e^{-2\pi a}} \right], & \operatorname{Im} z > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie in den anderen Fällen gewinnt man daraus die Ableitung $g'_{p,a}(z)$ der Funktion, die die obere Halbebene G_H auf das gesuchte Gebiet G_p in der w -Ebene abbildet:

$$(2.11) \quad g'_{p,a}(z) = 2 \cdot B \frac{e^{4\pi i z} + 1}{(e^{4\pi i z} e^{-4\pi a} - 1)^2}, \quad 0 < a < \infty.$$

Diese Funktion ist in G_H holomorph und von null verschieden. Auf dem Rand C_H hat sie an den Stellen $z_\nu = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Nullstellen. Dort ist die Abbildung nicht konform; wie beim linearen cusp hat der Rand an diesen Stellen Spitzen.

Die Integration liefert

$$(2.12) \quad g_{p,a}(z) = 2 \cdot B \left\{ z - \frac{1}{4\pi i} \ln \frac{e^{4\pi a} - e^{4\pi i z}}{e^{4\pi a} - 1} - \frac{1}{4\pi i} \frac{(1 + e^{-4\pi a})(1 - e^{4\pi i z})}{(1 - e^{-4\pi a})(1 - e^{4\pi i z} e^{4\pi a})} \right\}.$$

Die Integrationskonstante ist so gewählt, daß $g(0) = 0$ ist.

$g_{p,a}(z)$ hat die Symmetrieeigenschaften

$$(2.13) \quad \begin{aligned} g_{p,a}(z) + B \cdot \nu &= g_{p,a}\left(z + \frac{\nu}{2}\right) \\ \overline{g_{p,a}(z)} &= -g_{p,a}(-\bar{z}) \end{aligned}$$

Die Singularitäten des Potentials $F_{p,a}(w) = f(\check{g}_{p,a}(w))$ liegen an den Stellen

$$(2.14) \quad A_{vH} = g_{p,a}(i\alpha) + B \cdot v, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Die in (2.11) eingeführte Konstante B ist also gerade der Abstand der Singularitäten. Die Randkurve des Bildgebietes G_p ist $C_p = \{W = g_{p,a}(x), -\infty < x < +\infty\}$. Für die Bogenlänge S gewinnt man die Parameterdarstellung

$$(2.15) \quad S(x) = \frac{B}{2\pi} \frac{e^{4\pi a}}{\sinh 2\pi a} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\pi x}{\sinh 2\pi a}, \quad -\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}.$$

$g_{p,a}(z)$ liefert eine einparametrische Lösungsschar mit dem Parameter $0 < a < \infty$. Man kann zeigen, daß $g_{p,a}(z)$ nur für

$$a > a_s(n) = \frac{\ln 3}{4\pi}$$

schlicht ist (Anhang VI). Im Grenzfall $a \gg 1$ erhält man Bildgebiete mit Randkurven

$$(2.16) \quad C_p \quad g_{p,a}(x) = 2 \cdot B \left\{ x + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} e^{i2\pi x} \right\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Diese Randkurven sind Zykloide. Rollt man einen Kreis mit dem Radius $B/4\pi$ auf einer Geraden ab, so beschreibt ein Punkt auf dem Umfang die Kurve. Abb. 15a-b zeigen "picket fence" Gleichgewichte. Abb. 17 ist ein Beispiel einer nicht schlichten Abbildung.

Für die Stromdichte j_p^* auf dem Rande C_p erhält man

$$(2.17) \quad j_p^* = -\frac{j}{B} \frac{e^{2\pi a} - e^{-2\pi a}}{e^{4\pi a}}.$$

j_p^* ist eine für fallende $a > a_s(n)$ monoton steigende Funktion und erreicht für $a = a_s(n)$ ein Maximum. Damit ist ein maximaler Gleichgewichtsdruck bestimmt

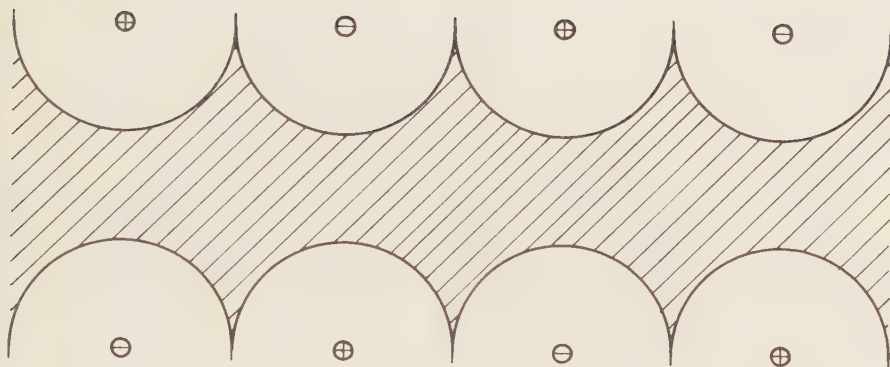


Abb. 15a

$$a = \frac{\ln 3}{4\pi}$$

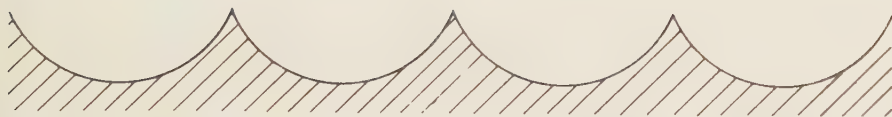
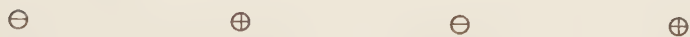


Abb. 15b

$$a = 0.73$$

Abb. 15a-b "picket fence" Gleichgewichte

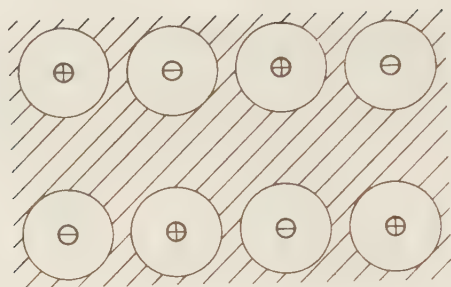


Abb.16 "picket fence" Gleichgewicht für $p > p_{\max}$.

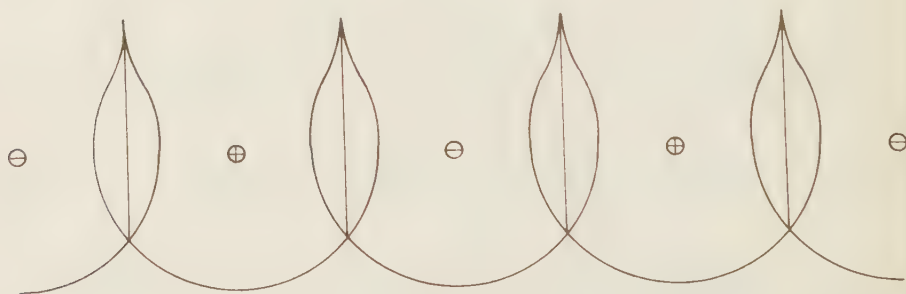


Abb.17 Nicht schlichte "picket fence" Lösung mit Verzweigungs-
schnitten, $a=0.034$.

$$(2.18) \quad p_{max} = \left(\frac{j^2}{B^2 3\sqrt{3}} \right)^{\frac{2}{21}} \frac{1}{c^2}$$

Für $p > p_{max}$ gibt es für ein einfach zusammenhängendes Plasma kein Gleichgewicht. Das Plasma bricht an den Spitzen durch. Die Gleichgewichtskonfiguration für $p > p_{max}$ ist in Abb.16 skizziert.

3. Das allgemeine potentialtheoretische Problem.

Bei den in Kap.1 und Kap.2 diskutierten Lösungen stand die Frage, Plasmagleichgewichte für leicht realisierbare Anordnungen zu finden, im Vordergrund. Die potentialtheoretische Aufgabe soll jetzt unter allgemeineren Gesichtspunkten behandelt werden.

3.1. Die allgemeine Lösung.

Die Aufgabe besteht darin, Potentiale $\bar{F}(w)$ zu finden, die bezüglich eines einfach zusammenhängenden Gebietes G die Bedingungen (1.8) und (1.9) erfüllen. Die Lösungsmethode ist die, daß man ausgehend von einem Potential $f(z)$, das bezüglich eines einfach zusammenhängenden Gebietes G^* der z -Ebene die Bedingung (1.8) erfüllt, eine konforme Abbildung $w = g(z)$ des Gebietes G^* auf das Gebiet G derart bestimmt, daß $\bar{F}(w) = f(\check{g}(w))$ in G die geforderten Eigenschaften hat.

Bei den diskutierten, speziellen Beispielen wurde, dem jeweiligen Problem angemessen, als Gebiet G^* der Einheitskreis, das Äußere des Einheitskreises oder die obere Halbebene gewählt. Die folgende Betrachtung beschränkt sich auf den Fall, daß G^* der Einheitskreis ist. Die Aussagen lassen sich auf alle anderen Fälle übertragen.

$f(z)$ sei also ein Potential, das bezüglich $G_K = \{|z| < 1\}$ (1.8) erfüllt, d.h. der Rand $C_K = \{|z| = 1\}$ von G_K ist Feldlinie. Zu $f(z)$ gehört in G_K eine Strombelegung $j(z)$. Umgekehrt kann man zu einer Strombelegung $j(z)$ in G_K mit der Methode der Bildströme eine solche Funktion $f(z)$ finden. So erhält man zum Beispiel für eine Strombelegung $j(\xi)$ längs eines Kurvenstückes C_s in G_K das Potential

$$(3.1) \quad f(z) = \frac{z}{c} \int_{C_s} j(\xi) \ln \frac{z - \xi}{z - 1/\bar{\xi}} |d\xi|$$

Zu $f(z)$ wird eine abbildende Funktion $w = g(z)$ gesucht, die (1.19) und (1.23) erfüllt. Man kann folgenden Satz beweisen: Zu

jedem Potential $f(z)$, das in einem Gebiet $\tilde{G}$, das den Rand C_K des Einheitskreises enthält, holomorph ist und für die C_K Feldlinie ist, gibt es eine Funktion $w = g(z)$, die (1.19) und (1.23) erfüllt. $g(z)$ ist bis auf einen Phasenfaktor $e^{i\phi}$ und eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Der Beweis läuft darauf hinaus, daß man das Problem auf eine bekannte Randwertaufgabe zurückführt. Es wird zunächst die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen.

Die Ableitung $f'(z)$ von $f(z)$ hat auf dem Rand C_K m Nullstellen z_ν von der Ordnung k_ν , $\nu = 1, \dots, n$. Die Nullstellen können sich auf C_K nicht häufen, da C_K nach Voraussetzung im Innern des Holomorphiegebietes $\tilde{G}$ von $f(z)$ liegt und dort die Nullstellen isoliert liegen. Mit (1.23) hat $g'(z)$ dieselben Nullstellen. Es wird jetzt die Funktion

$$(3.2) \quad G(z) := \ln \left\{ g'(z) \prod_{\nu=1}^m \frac{1}{(z - z_\nu)^{k_\nu}} \right\}$$

definiert. $G(z)$ ist mit (1.19) und nach Konstruktion im abgeschlossenen Gebiet $\bar{G}_K = \{ |z| \leq 1 \}$ holomorph. Mit (1.23) ist ihr Realteil auf dem Rand C_K des Einheitskreises bekannt:

$$(3.3) \quad \operatorname{Re} G(e^{iy}) = \ln \left\{ |k \cdot f'(e^{iy})| \cdot \prod_{\nu=1}^m \frac{1}{|e^{iy} - z_\nu|^{k_\nu}} \right\}.$$

Man kann jetzt den Satz aus der Funktionentheorie⁷ anwenden, daß eine in $\bar{G}_K$ holomorphe Funktion bis auf eine imaginäre Konstante $i\phi_0$ durch ihren Realteil auf dem Rand $C_K = \{ |z| = 1 \}$ eindeutig bestimmt ist und zwar gilt für diese

$$(3.4) \quad G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iy} + z}{e^{iy} - z} \ln \left\{ |k \cdot f'(e^{iy})| \prod_{\nu=1}^m \frac{1}{|e^{iy} - z_\nu|^{k_\nu}} \right\} dy + i\phi_0$$

Durch Umkehrung von (3.2) und nach Integration erhält man

$$(3.5) \quad g(z) = \int \prod_{v=1}^n (z - z_v)^{k_v} e^{G(z)} dz + K$$

Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt.

Da es aber auch zu jeder auf C_K holomorphen Funktion eine im abgeschlossenen Gebiet $\bar{G}_K$ holomorphe Funktion gibt, die durch (3.4) gegeben ist, erhält man unter den obigen Voraussetzungen auch immer eine Lösung. Es folgt unmittelbar, daß das Problem für eine verallgemeinerte Bedingung (1.23) lösbar ist, und zwar kann die Konstante K in (1.23) durch eine auf dem Rande C_K holomorphe Funktion ($\neq 0$) ersetzt werden.

Physikalisch sinnvoll sind natürlich nur die Lösungen mit schlichter Abbildungsfunktion. Nachteilig ist, daß im allgemeinen mit dieser Methode keine Funktionen $F(w)$ zu vorgegebenen Stromverteilungen $I(w)$ in G bestimmt werden können. Eine Ausnahme bilden die Funktionen $F(w)$, die in G lediglich isolierte logarithmische Singularitäten haben, wie es bei den in Kap.1 und Kap.2 behandelten Drahtleiteranordnungen der Fall war. Zum Abschluß soll daher die allgemeine Lösung für eine solche Drahtleiteranordnung angegeben werden, nachdem in Kap.1 und Kap.2 spezielle Beispiele im einzelnen diskutiert wurden. Die abbildende Funktion $w = g(z)$ kann in diesem Fall, wie in Kap.1 gezeigt wurde, direkt aus $f(z)$ gewonnen werden. Im allgemeinen Fall wird das nicht möglich sein. Die Lösung erhält man dann über das Integral (3.4).

3.2. Drahtleiteranordnungen.

Gesucht wird ein $F(w)$ in G , das in G (1.8) und (1.9) erfüllt, und in G n isolierte Singularitäten A_v , $v=1, \dots, n$ hat.

G sei als endlich vorausgesetzt. Die Lösungen für nicht endliche Gebiete G , also z.B. für cusp und picket fence, erhält man analog. Ausgangspunkt ist der Einheitskreis G_K in der z -Ebene. Das Potential

$$(3.6) \quad f(z) = \begin{cases} \frac{2}{c} \sum_{v=1}^n j_v \ln \frac{z - a_v}{z - \frac{1}{\bar{a}_v}} & , |z| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

hat bei a_v , $|a_v| < 1$ Singularitäten mit Strömen j_v , $v = 1, \dots, n$ und erfüllt (1.8) und (1.10). Die Ableitung lautet

$$(3.7) \quad f'(z) = \frac{2}{c} \frac{P(z)}{\prod_{v=1}^n (z - a_v)(z \bar{a}_v - 1)}$$

mit

$$(3.8) \quad P(z) = \sum_{\ell=1}^n j_{\ell} (a_{\ell} \bar{a}_{\ell} - 1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^n (z - a_k)(z \bar{a}_k - 1)$$

Wie in Kap.1 gewinnt man $g'(z)$ aus $f'(z)$, indem man die Polstellen und Nullstellen für $|z| < 1$ beseitigt, unter Verwendung von (1.15), ohne dabei den Betrag von $|f'(z)|$ auf dem Rand des Einheitskreises zu ändern. Der Nenner in (3.7) hat dazu bereits die geeignete Form, während der Zähler noch faktorisiert werden muß. Benutzt man die Eigenschaft des Polynoms $P(z)$, daß mit z_v auch $\frac{1}{\bar{z}_v}$ Nullstelle ist, so erhält man die Darstellung

$$(3.9) \quad P(z) = b z^m \prod_{v=1}^{n-m-1} (z - z_v)(z - \frac{1}{\bar{z}_v})$$

wobei $m \geq 0$ die Ordnung der Nullstelle $z=0$ angibt. Jetzt kann man mit (1.15) $g'(z)$ wie in Kap.1 konstruieren. Es ergibt sich

$$(3.10) \quad g'(z) = k \frac{\prod_{\ell=1}^{n-m-1} (z - z_\ell)^2}{\prod_{k=1}^n (z \bar{a}_k - 1)^2}$$

Nach Partialbruchzerlegung läßt sich der Ausdruck leicht integrieren:

$$(3.11) \quad g(z) = k \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{c_k \cdot z}{(z \bar{a}_k - 1)} + \frac{d_k}{\bar{a}_k} \ln(1 - z \bar{a}_k) \right\}$$

c_k, d_k sind Funktionen der $a_v, v=1, \dots, n$. Der Rand C des gesuchten Gebietes G in der w -Ebene ist gegeben durch $C = \{w = g(e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ und die Orte der Ströme j_v durch

$$(3.12) \quad H_v = g(a_v), \quad v=1, \dots, n.$$

Die abbildende Funktion hängt von dem reellen Parameter k und n komplexen Parametern a_v ab. Sucht man Lösungen für eine vorgegebene Leitergeometrie, d.h. gibt man die H_v in der w -Ebene vor, so hat man in (3.12) $2n$ reelle Gleichungen zur Bestimmung der n komplexen Parameter a_v und des reellen Parameters k . Man erhält damit eine einparametrische Lösungsschar, falls Lösungen dieses transzendenten Gleichungssystems existieren.

Anhang.

I. Es wird gezeigt, daß $w = g_a(z)$, $0 \leq a < 1$ aus (1.26) für und nur für Parameterwerte a im Intervall $0 \leq a < a_s(n)$ mit $0 < a_s(n) \leq 1$ über der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe der z -Ebene schlicht ist. $a_s(n)$ wird näherungsweise berechnet.

Zum Beweis ist es bequem, zunächst in der z - und w -Ebene die Ähnlichkeitstransformationen

$$\begin{aligned} \alpha e^{i \frac{\pi}{n}} z &\longrightarrow z \\ \frac{2\pi\alpha}{L(1-\alpha^{2n})} \cdot e^{i \frac{\pi}{n}} w &\longrightarrow w \end{aligned}$$

durchzuführen. $g_a(z)$ geht dabei über in

$$(I.1) \quad \tilde{g}(z) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{z}{1+z^n} - \frac{n-1}{n} \sum_{v=1}^n e^{i \frac{2v-1}{n} \pi} \ln(1 - z \bar{e}^{-i \frac{2v-1}{n} \pi}) \right\}$$

Diese Funktion ist im Einheitskreis holomorph und die Ableitung

$$(I.2) \quad \tilde{g}'(z) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+z^n)^2}$$

von null verschieden. Man sieht unmittelbar, daß $w = g_a(z)$ dann und nur dann über dem Einheitskreis schlicht ist, wenn $w = \tilde{g}(z)$ über dem Kreis $K_a = \{|z| < a\}$ schlicht ist.

Aus $\tilde{g}'(0) \neq 0$, der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die lokale Umkehrbarkeit, folgt, daß eine hinreichend kleine Umgebung von $z=0$ schlicht abgebildet wird. Es gibt somit einen größten Kreis $K_{a_s(n)} = \{|z| < a_s(n)\}$, in dem $\tilde{g}(z)$ schlicht ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. In Abb. 18 sind Bildgebiete K_a^* von K_a für verschiedene a dargestellt.

Die Bestimmung von $a_s(n)$ erfordert eine detailliertere Betrachtung der Abbildung $w = \tilde{g}(z)$. Dazu ist der folgende Satz⁺ nützlich:

+) E.C.Titchmarsh, Theory of Functions, S. 198 ff.

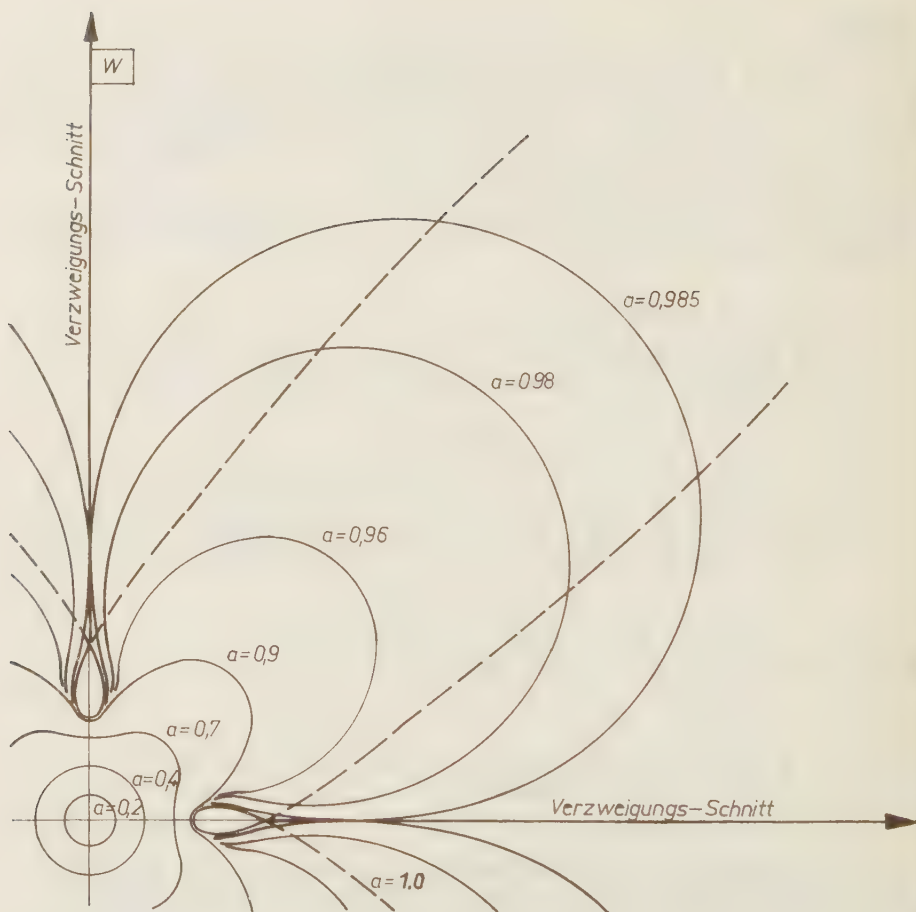


Abb. 16 Abbildung $w=\tilde{g}(z)$ des Einheitskreises G_K auf $\tilde{G}$.

Es sei C eine einfach geschlossene Kurve der z -Ebene, die das Gebiet D einschließt. Es sei $W=f(z)$ eine in D und auf C holomorphe Funktion, die auf C keinen Wert mehr als einmal annimmt. Dann ist $f(z)$ über D und C schlicht. Der Satz gilt auch noch, wenn $f(z)$ auf C lediglich stetig ist, und auch, wenn auf C ein Pol erster Ordnung liegt.

$\tilde{g}(z)$ ist in allen abgeschlossenen Kreisscheiben $\bar{K}_a = \{ |z| \leq a \}$, $a < 1$ holomorph. Zur Untersuchung der Schlichtheit genügt es also, die Eigenschaften des Randes C_a^* zu studieren.

Da $\tilde{g}(z)$ dieselben Symmetrieeigenschaften (1.28) wie $g_a(z)$ hat, ist C_a^* durch das Bild $C_{s,a}^* = \{ W = \tilde{g}(ae^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n} \}$ des Kreisbogens $C_{s,a} = \{ z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n} \}$ eindeutig bestimmt. C_a^* gewinnt man nämlich aus $C_{s,a}^*$ durch Spiegelung an den Strahlen $\phi = \nu \frac{\pi}{n}$, $\nu = 0, 1, \dots, 2n-1$.

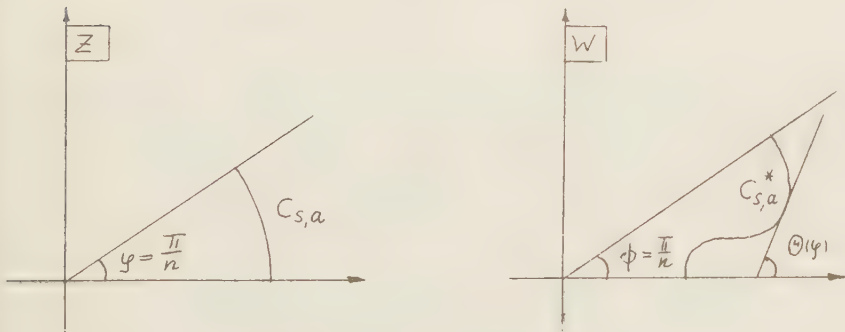


Abb. 19

Zunächst wird gezeigt, daß $C_{s,a}^*$ für alle a doppelpunktfrei ist. Die Endpunkte von $C_{s,a}^*$: $W_0 = \tilde{g}(a)$ und $W_1 = \tilde{g}(ae^{i\frac{\pi}{n}})$ liegen auf den Strahlen $\phi = 0$ und $\phi = \frac{\pi}{n}$. Die Lage der inneren Punkte von $C_{s,a}^*$ wird qualitativ ersichtlich aus der Parameterdarstellung des Steigungswinkels Θ der Tangente an $C_{s,a}^*$, die man aus (I.1) gewinnt:

$$(1.3) \quad \Theta_a(\varphi) = \operatorname{Im} \ln \frac{d}{d\varphi} \tilde{g}(ae^{i\varphi}), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}$$

$$\Theta_a(\varphi) = \frac{\pi}{2} + \varphi - 2 \operatorname{arctg} \frac{a^n \sin n\varphi}{1 + a^n \cos n\varphi}$$

Die Kurven $\Theta_a(\varphi)$ haben den in Abb.20 skizzierten Verlauf.

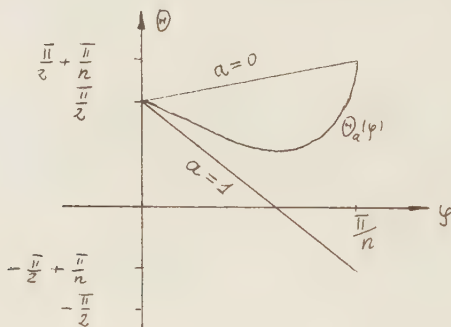


Abb.20

Mit wachsendem a bei festem φ nimmt $\Theta_a(\varphi)$ monoton ab. Alle Kurven $\Theta_a(\varphi)$ liegen zwischen den Grenzkurven, für die man aus (1.3) erhält:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \Theta_{a=0} &= \frac{\pi}{2} + \varphi \\ \Theta_{a=1} &= \frac{\pi}{2} - (n-1)\varphi, \end{aligned} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}$$

Daraus kann man schließen, daß $C_{s,a}^*$ keine Doppelpunkte hat. Denn würde ein Teilstück von $C_{s,a}^*$ eine geschlossene Kurve sein, so müßte für die maximalen und minimalen Steigungswinkel der Tangente im Intervall $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}$ notwendig gelten: $\Theta_{\max} - \Theta_{\min} > \pi$. Das ist aber ausgeschlossen, da nach (1.4) stets $\Theta_{\max} - \Theta_{\min} \leq \pi$ ist, wie man aus Abb.20 für $\varphi = \frac{\pi}{n}$ erkennt.

Die Randkurve C_a^* erhält man aus $C_{s,a}^*$ durch Spiegelung an den Strahlen $\phi = \nu \cdot \frac{\pi}{n}$, $\nu = 0, 1, \dots, 2n-1$. Doppelpunkte von C_a^*

können also nur auf den Strahlen $\phi = \frac{\pi}{n}$ liegen. C_a^* hat Doppelpunkte, wenn innere Punkte von $C_{s,a}^*$ auf den Strahlen $\phi = 0$ oder $\phi = \frac{\pi}{n}$ liegen.

Auf dem Strahl $\phi = \frac{\pi}{n}$ liegt kein innerer Punkt von $C_{s,a}^*$. Um das zu zeigen, teilt man den Strahl $\phi = \frac{\pi}{n}$ in die Intervalle $S_1 = \{w = re^{i\frac{\pi}{n}}, 0 \leq r < r_0\}$, $S_2 = \{w = re^{i\frac{\pi}{n}}, r_0 \leq r < \infty\}$ mit $r_0 = e^{-i\frac{\pi}{n}} \tilde{g}(ae^{i\frac{\pi}{n}})$. Läge ein innerer Punkt w_0 des positiv orientierten Randes $C_{s,a}^*$ auf S_1 , so wäre w_0 gleichzeitig Randpunkt und als Punkt von S_2 innerer Punkt des Bildgebietes K_a^* . Das ist aber wegen der Gebietstreue der Abbildung unmöglich. Auf S_2 kann ebenfalls kein Punkt von $C_{s,a}^*$ liegen, da dazu der Steigungswinkel der Tangente Werte $\Theta > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}$ annehmen müßte, was wegen (I.4) ausgeschlossen ist.

Auf dem Strahl $\phi = 0$ liegen für $n > 2$ und hinreichend großem a innere Punkte von $C_{s,a}^*$ und zwar genau dann, wenn die Gleichung

$$(I.5) \quad \operatorname{Im} \tilde{g}(ae^{i\varphi}) = 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq a < 1$$

Lösungen hat. Aus dem Verlauf des Tangentensteigungswinkels $\Theta_a(\varphi)$ aus (I.3), vgl. Abb. 20, folgt, daß (I.5) höchstens zwei Lösungen hat.

Für $n = 2$ hat (I.5) keine Lösung, da die dafür notwendige Bedingung $\Theta < 0$ in (I.3), (I.4) nicht erfüllt ist.

Für $n \geq 3$ gibt es für hinreichend großes a Lösungen. Um das zu zeigen, betrachtet man den Grenzfall $a = 1$; das ist möglich, da $\tilde{g}(z)$ auf der Kurve $\tilde{C}_{s,a=1} = \{z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{n}\}$ noch holomorph ist. $\varphi = \frac{\pi}{n}$ ist auszuschließen, da $\tilde{g}(z)$ dort singulär wird. In diesem Fall lautet

$$(I.6) \quad \operatorname{Im} \tilde{g}(e^{i\varphi}) = -\frac{\sin(\frac{n-1}{2}\varphi)}{2n \cos \frac{n}{2}\varphi} + \frac{n-1}{n^2} \sum_{\nu=1}^m \sin\left(\frac{2\nu-1}{n}\pi\right) \ln \frac{\sin\left(\frac{2\nu-1}{2n}\pi + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\nu-1}{2n}\pi - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

für $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{n}$ und $m = \frac{n}{2}$ für n gerade, $m = \frac{n-1}{2}$ für n ungerade.

Für φ gegen $\frac{\pi}{n}$ überwiegt in (I.6) der erste Term, der stets negativ ist, sodaß $\operatorname{Im} \tilde{g}(e^{i\varphi})$ negativ wird. Für kleine φ ist nach Gleichung (I.5) $\operatorname{Im} \tilde{g}(e^{i\varphi})$ positiv, da die Steigung der Tangente $\Theta_1(0) = \frac{\pi}{2}$ bei $\varphi = 0$ ist und die Kurve positiv orientiert ist. Wegen der Stetigkeit von $\operatorname{Im} \tilde{g}(e^{i\varphi})$ hat damit (I.5) eine Lösung.

Da die Kurven C_a stetig in C_{a-1} für $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{n}$ übergehen, hat (I.5) auch für $a < 1$ Lösungen. Beim kleinsten Parameterwert a , nämlich $a_s(n)$, für den (I.5) noch eine Lösung hat, berührt die Bildkurve $C_{a_s(n)}^*$ gerade den Strahl $\phi = 0$. In diesem Punkt ist $\Theta(\varphi_0) = 0$. Für $a < a_s(n)$ sind die Kurven C_a^* einfach geschlossen und die Abbildung schlicht. Zur Bestimmung von $a_s(n)$ erhält man neben (I.5) aus (I.3) eine zweite Gleichung. Beide Gleichungen lauten:

$$(I.7) \quad \begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} \tilde{g}(ae^{i\varphi}), \\ 0 &= \Theta(\varphi) = \frac{\pi}{2} + \varphi - 2 \operatorname{arctg} \frac{a^n \sin n\varphi}{1 + a^n \cos n\varphi}. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist mühsam; man kann für $a_s(n)$ jedoch eine Abschätzung angeben. Die Abbildung ist sicher schlicht, wenn $\Theta \geq 0$ immer erfüllt ist, d.h. wenn das Minimum von Θ gerade $\Theta = 0$ ist. Mit (I.7) soll also gelten:

$$(I.8) \quad \begin{aligned} 0 &= \Theta = \frac{\pi}{2} + \varphi - 2 \operatorname{arctg} \frac{a^n \sin n\varphi}{1 + a^n \cos n\varphi}, \\ 0 &= \frac{d\Theta}{d\varphi} = 1 - 2na^n \frac{a^n + \cos n\varphi}{1 + a^{2n} + 2a^n \cos n\varphi}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man zunächst umformen. Es ergibt sich:

$$(I.9) \quad \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) &= -a^n \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + n\varphi\right), \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) &= a^n (2n-1) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + n\varphi\right). \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungen für φ und a seien: φ_0, a_0 mit $a_0 < a_s(n)$. Aus (I.9) erhält man für φ_0 die Gleichung

$$(I.10) \quad \operatorname{tg} n \varphi = - \frac{2n \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{(2n-1) - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}$$

Daraus findet man für φ_0 die Abschätzung

$$(I.11) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} n \varphi_0 &> - \frac{n}{n-1} = \max_{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}} (\operatorname{tg} n \varphi), \\ \varphi_0 &> \frac{\pi}{n} - \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung von (I.9) liefert für a_0 die Abschätzung

$$(I.12) \quad a_0^n = - \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} + n \varphi_0 \right)} > \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

Mit (I.11) folgt daraus für $a_s(n)$

$$(I.13) \quad a_s^n(n) > a_0^n > \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2n} \operatorname{arctg} \frac{n}{n-1} \right).$$

II. Zur Bildung des Grenzfalles $a=1$ für den Rand $C^* = \{w = g_a(e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ ersetzt man den Parameter φ zweckmäßigerweise durch die Bogenlänge s . Aus (1.32) und (1.16) erhält man den Zusammenhang zwischen φ und s :

$$(II.1) \quad e^{iy} = \left(\frac{1 + a^n e^{i\sigma}}{a^n + e^{i\sigma}} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \sigma = \frac{2\pi n}{L} s, \quad 0 \leq s \leq L$$

Die rechte Seite durchläuft alle n Riemannschen Blätter der Funktion $w = (z)^{\frac{1}{n}}$ für $s: 0 \leq s \leq L$. Diesen Ausdruck setzt man in (1.26) ein und erhält

$$(II.2) \quad \tilde{g}(s) = \frac{L}{2\pi} \left[\frac{1 + a^n e^{-i\sigma}}{n e^{-i\sigma}} \cdot \left(\frac{1 + a^n e^{i\sigma}}{a^n + e^{i\sigma}} \right)^{\frac{1}{n}} - \right. \\ \left. - \frac{n-1}{n^2} (1-a^{2n}) \sum_{v=1}^n e^{i \frac{v}{n} 2\pi} \ln \left\{ 1 - a e^{-i \frac{v}{n} 2\pi} \left(\frac{1 + a^n e^{i\sigma}}{a^n + e^{i\sigma}} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \right]$$

Beim Grenzübergang $a \rightarrow 1$ hat man folgendes zu beachten. Der Radikand der n -ten Wurzel geht gegen 1. Für die Wurzeln gibt es n Lösungen: $e^{i \frac{\kappa}{n} 2\pi}$, $\kappa=1, \dots, n$. Welche Wurzel zu wählen ist, ist gegeben durch

$$(II.3) \quad \lim_{a \rightarrow 1} \left(\frac{1 + a^n e^{i\sigma}}{a^n + e^{i\sigma}} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\kappa}, \quad \text{falls } \frac{\kappa-1}{n} \leq \sigma < \frac{\kappa}{n}, \quad \kappa=1, \dots, n$$

Der Summenterm aus (II.2) geht für $a \rightarrow 1$ gegen null:

$$\lim_{a \rightarrow 1} \left[(1-a^{2n}) \sum_{v=1}^n e^{i \frac{v}{n} 2\pi} \ln \left\{ 1 - a e^{-i \frac{v}{n} 2\pi} \left(\frac{1 + a^n e^{i\sigma}}{a^n + e^{i\sigma}} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \right] = \\ = \lim_{a \rightarrow 1} (1-a^{2n}) e^{i \frac{\kappa}{n} 2\pi} \ln(1-a) = 0$$

Damit wird (II.2) bei $a=1$

$$(II.4) \quad g(e^{i\varphi(s)}) = \frac{\bar{L}}{2\pi n} e^{i\frac{K}{n}} (1 + e^{i\frac{2\pi n}{\bar{L}}s}) , \quad 0 \leq s \leq \bar{L} ,$$

mit $K=1, \dots, n$ derart, daß $\bar{L} \frac{K-1}{n} \leq s < \frac{K}{n} \cdot \bar{L}$ ist.

III. Der Parameterwert a_{ns} für $n > 1$ ist gegeben durch die Gleichung

$$(III.1) \quad \frac{\bar{L}}{2\pi} = g_{ns}(1)$$

Es ist zweckmäßig zur Abschätzung von a_{ns} die Funktion $W = g_a(z)$ in eine Reihe zu entwickeln

$$(III.2) \quad g_a(z) = \frac{\bar{L}}{2\pi} (1 - a^{2n}) z \cdot \sum_{K=0}^{\infty} \frac{K+1}{Kn+1} (a^n z^n)^K$$

Hierzu integriert man zweckmäßigerweise die Reihenentwicklung von (1.25) gliedweise. Setzt man $g_a(z)$ in (III.1) ein, so erhält man für a_{ns}

$$(III.3) \quad a_{ns}^n \sum_{K=0}^{\infty} \frac{a_{ns}^{nK}}{(Kn+1) \cdot (Kn+3n+1)} = \frac{1}{n^2-1} , \quad n > 1$$

In niedrigster Näherung folgt daraus die Abschätzung ($K=0$)

$$(III.4) \quad a_{ns}^n < \frac{2n+1}{n^2-1} , \quad n > 1$$

IV. Zur Ableitung von (1.41) geht man aus von (1.29)

$$(IV.1) \quad A = \bar{L} \cdot h(a)$$

mit

$$(IV.2) \quad h(a) \equiv \frac{g(a)}{\bar{L}} = \frac{1}{2\pi} (1 - a^{2n}) a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{kn+1} a^{2nk}$$

Dabei ist für $g(a)$ aus (1.26) die in (III.2) angegebene Reihenentwicklung eingesetzt worden. Bei festem A wird $\bar{L}$ minimal, wenn $h(a)$ maximal ist. Notwendig dafür ist

$$(IV.3) \quad 0 = \frac{d}{da} h(a) = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-1)(2nk+1)}{(nk-n+1)(nk+1)} a^{2nk} \right)$$

Diese Gleichung hat für $n > 1$ eine Lösung. Es liegt auch ein Maximum vor, da die 2. Ableitung immer negativ ist:

$$(IV.4) \quad \frac{d^2}{da^2} h(a) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-1)2nk(2nk+1)}{(nk-n+1)(nk+1)} a^{2nk-1}$$

Mit (IV.3) ist $a_{\min}$ gegeben durch

$$(IV.5) \quad \frac{1}{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2nk+1}{(kn+1)(kn-n+1)} a_{\min}^{2nk}, \quad n > 1$$

V. Die Funktionen $W = g_\alpha(z)$, $1 < \alpha < \infty$, aus (2,3) sind für und nur für Parameterwerte $\alpha \geq \alpha_s(n) = \left(\frac{3n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$, $n \geq 2$, über dem abgeschlossenen Gebiet $\bar{G} = \{ |z| \geq 1 \}$ schlicht. Für $n=1$ ist keine Funktion über $\bar{G}$ schlicht.

Beweis: Wegen der Symmetrieeigenschaften (2.4) von $W = g_\alpha(z)$ genügt es, $g_\alpha(z)$ über dem Gebiet $G_s = \{ z = r e^{i\varphi}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2n}, r > 1 \}$ und dem Rand $C_s = C_0 + C_1 + C_2$

$$C_0 = \{ z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2n} \}$$

$$C_1 = \{ z = r e^{i\frac{\pi}{2n}}, 1 \leq r \leq \infty \}$$

$$C_2 = \{ z = r, \infty \geq r \geq 1 \}$$

zu betrachten. Für alle anderen $z \in \bar{G}$ gewinnt man $g_\alpha(z)$ durch Spiegelung an den Strahlen $\phi = \frac{\pi}{2n} \nu$, $\nu = 1, \dots, 4n$ der w -Ebene.

Notwendig für die Schlichtheit von $g_\alpha(z)$ über $\bar{G}$ ist, daß $g_\alpha(z)$ über dem abgeschlossenen Gebiet $G_s \cup C_s$ schlicht ist. $g_\alpha(z)$ erfüllt in G_s und auf C_s die Voraussetzungen des im Anhang I zitierten Satzes. Danach ist $g_\alpha(z)$ schlicht über $G_s \cup C_s$, falls das Bild C_s^* von C_s eine einfach geschlossene Kurve ist. C_s^* setzt sich aus drei Kurvenstücken $C_s^* = C_0^* + C_1^* + C_2^*$, den Bildern von C_0 , C_1 und C_2 zusammen (Abb.21)

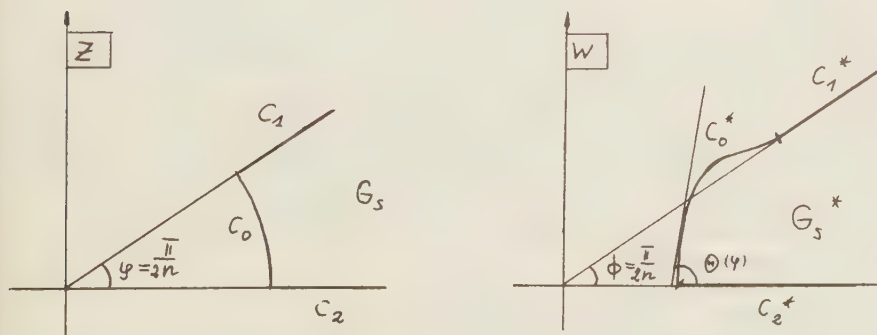


Abb.21

C_1^*, C_2^* liegen, wie aus den Symmetrieeigenschaften (2.4) leicht folgt, auf den Strahlen $\phi=0$ und $\phi=\frac{\pi}{2n}$:

$$\begin{aligned} C_1^* &= \{w=R, g_d(1) \leq R \leq \infty\} \\ C_2^* &= \{w=R e^{i\frac{\pi}{2n}}, g_d(e^{i\frac{\pi}{2n}}) e^{-i\frac{\pi}{2n}} \leq R \leq \infty\} \end{aligned}$$

Den Verlauf von $C_0^* = \{w = g_d(e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2n}\}$ ersieht man am besten aus dem Steigungswinkel Θ der Tangente an die Kurve, für den man aus (2.3) erhält

$$(V.1) \quad \Theta(\varphi) = \frac{\pi}{2} + (3n+1)\varphi - 2 \operatorname{arctg} \frac{d^{2n} \sin 2n\varphi}{d^{2n} \cos 2n\varphi - 1}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2n}$$

Für den arctg ist bei $\varphi=0$ der Hauptwert zu nehmen. Durchläuft das Argument des arctg eine Polstelle, ist die Vieldeutigkeit der Funktion zu berücksichtigen. Die zur Diskussion benötigte Ableitung von $\Theta(\varphi)$ lautet

$$(V.2) \quad \frac{d\Theta}{d\varphi} = - \frac{(n-1)d^{4n} + 2(n+1)d^{2n} \cos 2n\varphi - (3n+1)}{1 + d^{4n} - 2d^{2n} \cos 2n\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Die Endpunkte von C_0^* : $w_0 = g_d(1)$, $w_1 = g_d(e^{i\frac{\pi}{2n}})$ liegen auf den Strahlen $\phi=0$ und $\phi=\frac{\pi}{2n}$ mit Tangentensteigungswinkeln $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$ und $\Theta = \frac{\pi}{2n}$. Ist nun C_0^* selbst doppelpunktfrei, und liegen alle inneren Punkte von C_0^* im Sektor $S = \{w = R e^{i\phi}, 0 < \phi < \frac{\pi}{2n}, R > 0\}$, so ist C_s^* einfach geschlossen und $g_d(z)$ über $G_s \cup C_s$ schlicht. Es ist $g_d(z)$ aber auch schlicht über $\bar{G}$, da das durch Spiegelung des Bildgebietes von $G_s \cup C_s$ an den Strahlen $\phi = \nu \frac{\pi}{2n}$, $\nu = 1, \dots, 4n$ entstehende Bildgebiet $\bar{G}^*$ von $\bar{G}$ schlicht über der w -Ebene liegt und die Abbildung damit auch global eineindeutig ist.

Liegen umgekehrt innere Punkte von C_0^* außerhalb des Sektors S , dann kann zwar $g_d(z)$ über $G_s \cup C_s$ schlicht sein, aber nicht über $\bar{G}$, da sich die Spiegelbilder in diesem Fall überlappen und damit $\bar{G}^*$ nicht mehr schlicht über der w -Ebene liegt. Die

Forderung, daß alle inneren Punkte von C_o^* in S liegen, ist also auch notwendig für die Schlichtheit von $g_{\alpha}(z)$ über $\bar{G}$.

Für welche Parameterwerte d ist diese Forderung erfüllt? Im Falle $n \geq 2$ ist für hinreichend großes d die Ableitung $\frac{d\theta}{dy} < 0$ im Intervall $J = \{0 \leq y < \frac{\pi}{2n}\}$. θ fällt dann monoton von $\frac{\pi}{2}$ auf $\frac{\pi}{2n}$. C_o^* ist doppelpunktfrei, und die inneren Punkte von C_o^* liegen ganz im Sektor S . Für hinreichend kleine d dagegen hat $\frac{d\theta}{dy}$ in J genau eine Nullstelle, d.h. C_o^* hat einen Wendepunkt, und $\frac{d\theta}{dy}$ ist im Punkte $y = \frac{\pi}{2n}$ positiv. Dann gibt es in einer Umgebung des Endpunktes $w_1 = g_{\alpha}(e^{i\frac{\pi}{2n}})$ von C_o^* innere Punkte, die außerhalb von S liegen, d.h. die Abbildung ist nicht schlicht über $\bar{G}$.

Für das kleinste d , für das $\frac{d\theta}{dy}$ in J keine Nullstelle hat, bei welchem die Abbildung also schlicht über $\bar{G}$ ist, hat $\frac{d\theta}{dy}$ die Nullstelle im Punkte $y = \frac{\pi}{2n}$. Dieser Grenzparameterwert $d_{S(n)}$ ist nach (V.2) gegeben durch die Gleichung

$$(V.3) \quad 0 = (n-1) d^{4n} + 2(n+1) d^{2n} \cos \pi - (3n+1)$$

mit der positiven Lösung

$$(V.4) \quad d_{S(n)} = \left(\frac{3n+1}{n-1} \right)^{\frac{1}{2n}}$$

Die anderen Lösungen sind negativ oder nicht reell. Damit ist gezeigt, daß $g_{\alpha}(z)$ über $\bar{G}$ für Parameterwerte $0 < d < d_{S(n)} = \left(\frac{3n+1}{n-1} \right)^{\frac{1}{2n}}$ für $n \geq 2$ schlicht ist. Für $n=1$ ist $\frac{d\theta}{dy} > 0$ im Punkte $y = \frac{\pi}{2n}$ für alle d . Somit gibt es für $n=1$ keine schlichten Lösungen.

VI. Die Funktionen $W = g_{p,a}(z)$, $0 < a < \infty$, aus (2.12) sind für und nur für Parameterwerte $a \geq \frac{\ln 3}{4\pi}$ über der oberen, abgeschlossenen Halbebene $\bar{H} = \{z: \text{Im } z \geq 0\}$ schlicht.

Beweis: $g_{p,a}(z)$ erfüllt bezüglich $\bar{H}$ die Voraussetzungen des in Anhang I zitierten Satzes: $g_{p,a}(z)$ ist in $H = \{z: \text{Im } z > 0\}$ holomorph und auf dem Rand $C_H = \{z = x, -\infty \leq x < +\infty\}$ stetig außer im Punkte $z = \infty$, in dem $g_{p,a}(z)$ einen Pol erster Ordnung hat. $g_{p,a}(z)$ ist dann über $\bar{H}$ schlicht, wenn das Bild C_H^* des Randes C_H einfach geschlossen ist. Aus der Eindeutigkeit von $g_{p,a}(z)$ folgt, daß C_H^* geschlossen ist. Es ist also nur zu untersuchen, für welche Parameterwerte a der Rand C_H^* doppelpunktfrei ist. Wegen der Symmetrieeigenschaften (2.13) von $g_{p,a}(z)$ genügt es, das Bild $C_S^* = \{W = g_{p,a}(x), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}\}$ des Kurvenstückes $C_S = \{z = x, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}\}$ zu betrachten. C_H^* gewinnt man aus C_S^* durch Spiegelung an den Geraden $u = \frac{\beta}{2}v, v = 0, \pm 1, \pm 3, \dots$ ($W = u + iv$).

Um den Verlauf von C_S^* zu übersehen, bildet man auch hier zweckmäßigerweise den Steigungswinkel Θ der Tangente an C_S^* . Aus (2.12) erhält man für $\Theta(x)$ und die Ableitung $\frac{d\Theta}{dx} \Theta(x)$

$$(VI.1) \quad \Theta(x) = 2\pi x + 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha \sin 4\pi x}{1 - \alpha \cos 4\pi x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4},$$

und

$$(VI.2) \quad \frac{d\Theta}{dx} = 2\pi \frac{1 + 2\alpha \cos 4\pi x - 3\alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos 4\pi x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

mit der Abkürzung $\alpha = e^{-4\pi a}$, $1 > \alpha > 0$.

Die Endpunkte von C_S^* : $W_0 = 0$ und $W_1 = g_{p,a}(\frac{1}{4})$ liegen auf den Geraden $u = 0$ und $u = \frac{\beta}{2}$ mit Tangentensteigungswinkeln $\Theta(0) = 0$ und $\Theta(\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2}$. (Abb. 22).

Für hinreichend kleine α ist $\frac{d\Theta}{dx} > 0$ im Intervall $J = \{x: 0 \leq x < \frac{1}{4}\}$. Θ steigt dann monoton von null auf $\frac{\pi}{2}$. C_S^* ist dann doppelpunktfrei, und alle inneren Punkte von C_S^* liegen im Streifen $S = \{W: 0 < u < \frac{\beta}{2}\}$. Damit ist auch die durch Spiegelung entste-

hende Kurve C_H^* doppelpunktfrei. Die Abbildung ist schlicht. Für hinreichend großes α hat $\frac{d\theta}{dx}$ eine Nullstelle in $\mathcal{I}$, d.h. C_S^* hat einen Wendepunkt. Im Punkte $x = \frac{1}{4}$ ist $\frac{d\theta}{dx} < 0$, und somit gibt es in einer Umgebung vom Endpunkt $w_1 = g_{P,a}(\frac{1}{4})$ innere Punkte von C_S^* , die nicht in S liegen. Die durch Spiegelung von C_S^* an den Geraden $u = \frac{B}{2}v$, $v=0, \pm 1, \pm 2$ gebildete Randkurve C_H^* hat auf diesen Geraden Doppelpunkte. Die Abbildung ist nicht schlicht über $\bar{H}$.

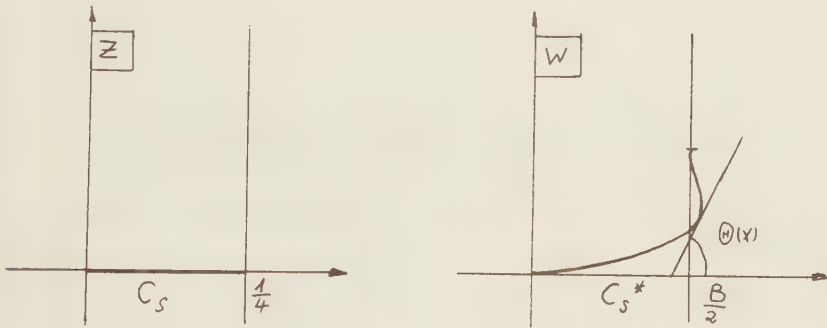


Abb.22

Beim größten Parameterwert α , für den $\frac{d\theta}{dx} > 0$ in $\mathcal{I}$ ist, liegt die Nullstelle $\frac{d\theta}{dx} = 0$ gerade im Endpunkt von C_S^* : $w_1 = g_{P,a}(\frac{1}{4})$. Dieser Parameterwert α_s ist mit (VI.2) durch die Gleichung

$$(VI.3) \quad 0 = 1 + 2\alpha \cos \pi - 3\alpha^2,$$

mit der positiven Lösung

$$(VI.4) \quad \alpha_s = \frac{1}{3}$$

gegeben. Die zweite Lösung ist negativ. Mit $\alpha = e^{-4\pi a}$ erhält

man daraus das Ergebnis, daß die Funktionen $g_{p,a}(z)$ für Parameterwerte

$$(VI.5) \quad a \geq a_s = \frac{\ln 3}{4\pi}$$

über $\bar{H}$ schlicht sind.

Herrn Prof.Dr.E.Fünfer und Herrn Prof.Dr.A.Schlüter danke ich für die Förderung der Arbeit. Herr Dr.W.Köppendörfer half mir mit zahlreichen Anregungen und Diskussionen. Herrn Dr.R.Gorenflo bin ich für die kritische Durchsicht des Manuskriptes zu Dank verpflichtet.

Zusammenfassung

Es wird das magnetohydrostatische Gleichgewicht von Plasmakonfigurationen mit einem äußeren Magnetfeld für den Fall, daß das Plasma magnetfeldfrei und das äußere Magnetfeld eben ist, untersucht. Für das dann vorliegende zweidimensionale potentialtheoretische Problem wird eine funktionentheoretische Lösungsmethode entwickelt. Es zeigt sich, daß Lösungen in besonders einfacher Weise gefunden werden können, wenn die Leiter für die das äußere Magnetfeld erzeugenden Ströme Drähte sind, d.h. wenn das komplexe Potential des Magnetfeldes außerhalb des Plasmas lediglich isolierte, logarithmische Singularitäten hat. Jedoch auch für allgemeinere Außenstromverteilungen können mit der hier entwickelten Methode Lösungen angegeben werden.

Im einzelnen werden Beispiele der im Hinblick auf die Realisierbarkeit einfachsten und wichtigsten Konfigurationen diskutiert. Dieses sind der M+S Hohlzylinder, eine zweifach zusammenhängende, elektrodenlose Plasmakonfiguration, der lineare cusp und die "picket fence" Anordnung, einfach zusammenhängende Plasmakonfigurationen. Als Außenstromleiter sind in allen Beispielen symmetrische Drahtleiteranordnungen gewählt; hinzukommt bei dem M+S Hohlzylinder als Leiterelement ein Kreiszylindermantel.

In allen Fällen ergeben sich einparametrische Lösungsscharen für die Gleichgewichtslage des Plasmas bei fester Leitergeometrie. Zu vorgegebenen Außenströmen existieren Plasmagleichgewichte in einem bestimmten Druckbereich.

Literaturverzeichnis

1. F. Meyer und H.U. Schmidt, Z. Naturforschg. 13a, 1005 (1958)
2. H.v. Helmholtz, Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. Preußische Akademie (1868)
3. G. Kirchhoff, Crelles Journ. 70 (1869) und Vorlesungen über Mechanik Kap.22
4. H. Lamb, Hydrodynamics, Kap.4 §§ 73 ff.
5. I. Berkowitz, Conf. on Controlled Thermonuclear Reactions, Gatlinburg, Tennessee (1956), 349
6. R. Gorenflo, Laborbericht des Instituts für Plasmaphysik Garching, IPP 6/14 (1964) und Z.f. angew. Mathem., Sonderheft für GAMM Tagung, April 1964
7. H. Behnke und F. Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen Springer- Verlag 1962, Seite 167 ff.

L e b e n s l a u f

Am 12.9.1936 wurde ich als Sohn des Regierungsbaumeisters Dipl.Ing. Heinrich Merkel und seiner Ehefrau Charlotte, geb. Burski in Berlin geboren. Nach vierjähriger Volksschulzeit besuchte ich von Herbst 1946 bis Ende 1947 das altsprachliche Gymnasium in Nürnberg und dann das humanistische Wilhelm-Dörpfeld-Gymnasium in Wuppertal. Dort legte ich am 9.3.1955 die Reifeprüfung ab.

Nach einem halbjährigen Praktikum bei den Farbenfabriken Bayer AG in Wuppertal begann ich das Studium der Physik an der Technischen Hochschule in München und setzte es vom Sommersemester 1956 an an der Universität München fort. 1958 bestand ich die Vordiplomprüfung und am 6.12.1962 die Hauptdiplomprüfung. Die Diplomarbeit mit dem Titel "Die Streuung polarisierter Elektronen an polarisierten Protonen" fertigte ich am Institut für theoretische Physik der Universität München an. Seit Februar 1963 bin ich Stipendiat am Institut für Plasmaphysik GmbH in Garching bei München.

